Complexes : forme algébrique et conjugués

Exercice 1 :

Donner la partie réelle, la partie imaginaire et le conjugué des nombres complexes suivants :

$$
\begin{aligned}
z_1 &= -2i + 5 \\
z_2 &= 15 \\
z_3 &= 3i \\
z_4 &= i(2 + 3i)
\end{aligned}
$$

Exercice 2 :

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1. $z_1 = (2 + 5i) + (i + 3)$
2. $z_2 = 4(-2 + 3i) + 3(-5 - 8i)$
3. $z_3 = (2 - i)(3 + 8i)$
4. $z_4 = (1 - i)\overline{(1 + i)}$
5. $z_5 = i(1 - 3i)^2$
6. $z_6 = (1 + i)^3$

Exercice 3 :

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1. $z_1 = \frac{1}{1+i}$
2. $z_2 = \frac{-4}{1+i\sqrt{3}}$
3. $z_3 = \frac{1-2i}{3+i}$
4. $z_4 = \frac{(3+5i)^2}{1-2i}$
5. $z_5 = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i}$

Exercice 4 :

Proposition 1: Formule du binôme de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

où :

— $\binom{n}{k}$ est le coefficient binomial, donné par $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$,

— a et b sont deux termes quelconques,

— n est un entier naturel ($n \in \mathbb{N}$),

— k est un entier variant de 0 à n.

Simplifier les nombres complexes suivants : $(1+i)^5$, $(1-i)^4$.

Exercice 5 :

Soit z un nombre complexe non nul, de forme algébrique $z = x + iy$. Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = \frac{\overline{z}}{z}$
2. $z_2 = \frac{iz}{\overline{z}}$.

Exercice 6 :

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

1. $z + 2i = iz - 1$
2. $(3+2i)(z-1) = i$
3. $(2-i)z + 1 = (3+2i)z - i$
4. $(4-2i)z^2 = (1+5i)z$

On écrira les solutions sous forme algébrique.

Exercice 7 :

Résoudre les équations suivantes :

1. $2z + i = \overline{z} + 1$
2. $2z + \overline{z} = 2 + 3i$
3. $2z + 2\overline{z} = 2 + 3i$

Exercice 8 :

Résoudre les systèmes suivants, d'inconnues les nombres complexes z_1 et z_2 :

$$\begin{cases} 2z_1 - z_2 & = i \\ -2z_1 + 3iz_2 & = -17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3iz_1 + iz_2 & = i + 7 \\ iz_1 + 2z_2 & = 11i \end{cases}$$

On donnera les résultats sous forme algébrique.