Forme exponentielle complexe et compléments

Exercice 1 :

Écrire sous forme algébrique :

a) $e^{i\frac{\pi}{3}}$.
b) $e^{i\frac{\pi}{4}}$.
c) $e^{i\frac{\pi}{2}}$.
d) $e^{i\pi}$.
e) $e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
f) $e^{-i\frac{\pi}{4}}$.
g) $e^{-i\frac{\pi}{2}}$.
h) $e^{-i\pi}$.

Exercice 2 :

Écrire sous forme d'exponentielle complexe :

a) i.
b) $-i$.
c) $1+i$.
d) $1-i$.
e) $\dfrac{1}{i}$.
f) $\sqrt{3}+i$.
g) $\sqrt{3}-i$.

Exercice 3 :

1. Trouver le module et l'argument de $j = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$.
2. Calculer $1+j+j^2$ en utilisant la forme exponentielle de j.
3. Calculer $z = j^{13}$. On donnera le résultat final sous forme algébrique.

Exercice 4 :

Dans cet exercice, on va chercher à linéariser une equation de la forme $\cos^m\theta\sin^n\theta$:

Méthode :

On va chercher à linéariser $\sin^6\theta$. Pour cela on utilise la formule d'Euler :

$$\sin^6\theta = \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^6$$

On developpe le second membre de cette égalité en utilisant la formule du binome de Newton :

$$\sin^6\theta = -\frac{1}{64}\left(e^{6i\theta}-6e^{4i\theta}+15e^{2i\theta}-20+15e^{-2i\theta}-6e^{-4i\theta}+e^{-6i\theta}\right).$$

En regroupant les termes symétriques en $e^{ik\theta}$ et en $e^{-ik\theta}$, on obtient :

$$\sin^6\theta = -\frac{1}{64}\left(e^{6i\theta}+e^{-6i\theta}-6(e^{4i\theta}+e^{-4i\theta})+15(e^{2i\theta}+e^{-2i\theta})-20\right)$$

et donc :

$$\sin^6\theta = -\frac{1}{32}(\cos 6\theta - 6\cos 4\theta + 15\cos 2\theta - 10).$$

La linéarisation est très utile quand on cherche à intégrer des expressions de la forme $\cos^m\theta\sin^n\theta$.

Linéariser l'expression suivante :

1. $\cos^4\theta$.
2. calculer $\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta d\theta$

Exercice 5 :

1. En utilisant l'expression $1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$, en déduire le module et l'argument de $z_1 = 1+\cos\theta+i\sin\theta$, avec $\theta\in]0,\pi[$.
2. Déterminer de même le module et l'argument de $z_2 = 1-\cos\theta-i\sin\theta$, avec $\theta\in]0,\pi[$.
3. Simplifier $Z=\frac{z_1}{z_2}$.

Exercice 6 :

Soit la fonction $f(t) = \lambda e^{i\omega t} + \mu e^{-i\omega t}$, où ω est un nombre réel, tandis que λ et μ sont des nombres complexes.

1. Quelle condition doivent vérifier λ et μ pour que $f(t)$ soit une une fonction réelle ?
2. Montrer que, dans ce cas, $f(t)$ peut se mettre sous la forme $A\cos(\omega t + \phi)$ et exprimer A et ϕ en fonction des données.

Exercice 7 :

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes de modules 1, avec $z_1 z_2 \neq -1$. Démontrer que le nombre complexe $z = \frac{z_1+z_2}{1+z_1 z_2}$ est réel.

Exercice 8 :

Soient x, y et z trois nombres complexes de module 1. Montrer que $|x + y + z| = |xy + yz + zx|$.

Exercice 9 :

Soient a et b de module 1, $a \neq b$, et $z \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$Re(\frac{z + ab\overline{z} - a + b}{a - b}) = -1$$