Forme exponentielle complexe et compléments

Exercice 1 :

Écrire sous forme algébrique :

a) $e^{i\frac{\pi}{3}}$.
b) $e^{i\frac{\pi}{4}}$.
c) $e^{i\frac{\pi}{2}}$.
d) $e^{i\pi}$.
e) $e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
f) $e^{-i\frac{\pi}{4}}$.
g) $e^{-i\frac{\pi}{2}}$.
h) $e^{-i\pi}$.

Solution:

a) $e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$,

b) $e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$,

c) $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$,

d) $e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$,

e) $e^{-i\frac{\pi}{3}} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$,

f) $e^{-i\frac{\pi}{4}} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$,

g) $e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -i$,

h) $e^{-i\pi} = \cos(-\pi) + i\sin(-\pi) = -1$.

Exercice 2 :

Écrire sous forme d'exponentielle complexe :

a) i.
b) $-i$.
c) $1+i$.
d) $1-i$.
e) $\frac{1}{i}$.
f) $\sqrt{3}+i$.
g) $\sqrt{3}-i$.

Solution:

a) $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$,
b) $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$,
c) $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$,
d) $1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$,
e) $\frac{1}{i} = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$,
f) $\sqrt{3}+i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$,
g) $\sqrt{3}-i = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

Exercice 3 :

1. Trouver le module et l'argument de $j = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$.
2. Calculer $1+j+j^2$ en utilisant la forme exponentielle de j.
3. Calculer $z = j^{13}$. On donnera le résultat final sous forme algébrique.

Solution:

1.
$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

2.

$$1 + j + j^2 = 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{i\frac{4\pi}{3}} = 1 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0.$$

3. En utilisant les exponentielles complexes, on obtient :

$$j^{13} = e^{i\frac{26\pi}{3}} = e^{i\left(\frac{24\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)} = e^{i\left(\frac{2\pi}{3} + 8\pi\right)} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exercice 4 :

Dans cet exercice, on va chercher à linéariser une equation de la forme $\cos^m \theta \sin^n \theta$:

Méthode :

On va chercher à linéariser $\sin^6 \theta$. Pour cela on utilise la formule d'Euler :

$$\sin^6 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^6$$

On developpe le second membre de cette égalité en utilisant la formule du binome de Newton :

$$\sin^6 \theta = -\frac{1}{64}\left(e^{6i\theta} - 6e^{4i\theta} + 15e^{2i\theta} - 20 + 15e^{-2i\theta} - 6e^{-4i\theta} + e^{-6i\theta}\right).$$

En regroupant les termes symétriques en $e^{ik\theta}$ et en $e^{-ik\theta}$, on obtient :

$$\sin^6 \theta = -\frac{1}{64}\left(e^{6i\theta} + e^{-6i\theta} - 6(e^{4i\theta} + e^{-4i\theta}) + 15(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) - 20\right)$$

et donc :

$$\sin^6 \theta = -\frac{1}{32}(\cos 6\theta - 6\cos 4\theta + 15\cos 2\theta - 10).$$

La linéarisation est très utile quand on cherche à intégrer des expressions de la forme $\cos^m \theta \sin^n \theta$.

Linéariser l'expression suivante :

1. $\cos^4\theta$.
2. calculer $\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta d\theta$

Solution:

1. $$\begin{aligned}\cos^4(\theta) &= \frac{1}{16}\left(e^{4i\theta}+4e^{3i\theta}e^{-i\theta}+6e^{2i\theta}e^{-2i\theta}+4e^{i\theta}e^{-3i\theta}+e^{-4i\theta}\right)\\ &= \frac{1}{16}\left(e^{4i\theta}+4e^{2i\theta}+6+4e^{-2i\theta}+e^{-4i\theta}\right)\\ &= \frac{1}{16}\left(e^{4i\theta}+e^{-4i\theta}+4e^{2i\theta}+4e^{-2i\theta}+6\right)\\ &= \frac{1}{16}\left(2\cos(4\theta)+8\cos(2\theta)+6\right)\\ &= \frac{\cos(4\theta)}{8}+\frac{\cos(2\theta)}{2}+\frac{3}{8}.\end{aligned}$$

2. Utilisons la forme linéarisée de $\cos^4\theta$:
$$\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos(2\theta)+\frac{1}{8}\cos(4\theta)\right)d\theta.$$
Nous pouvons maintenant calculer chaque terme séparément :
$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\frac{3}{8}\,d\theta &= \frac{3}{8}\times\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{16},\\ \int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\cos(2\theta)\,d\theta &= \frac{1}{2}\times\left[\frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_0^{\pi/2}=0,\\ \int_0^{\pi/2}\frac{1}{8}\cos(4\theta)\,d\theta &= \frac{1}{8}\times\left[\frac{\sin(4\theta)}{4}\right]_0^{\pi/2}=0.\end{aligned}$$
En combinant les résultats, nous obtenons :
$$\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\,d\theta=\frac{3\pi}{16}.$$

Exercice 5 :

1. En utilisant l'expression $1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$, en déduire le module et l'argument de $z_1 = 1+\cos\theta + i\sin\theta$, avec $\theta \in]0,\pi[$.
2. Déterminer de même le module et l'argument de $z_2 = 1-\cos\theta - i\sin\theta$, avec $\theta \in]0,\pi[$.
3. Simplifier $Z = \frac{z_1}{z_2}$.

Solution:

1. On sait que (formules trigonométriques) $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$. On a donc

$$\begin{aligned} z_1 &= 2\cos^2\frac{\theta}{2} + 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\ &= 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

Puisque $\theta \in]0,\pi[$, $\frac{\theta}{2} \in]0,\frac{\pi}{2}[$ et donc $2\cos\frac{\theta}{2} > 0$. Cela démontre que $|z_1| = 2\cos\frac{\theta}{2}$ et $\arg z_1 = \frac{\theta}{2}$.

2. On utilise la relations $\cos\theta = 1-2\sin^2\frac{\theta}{2}$

$$\begin{aligned} z_2 &= 2\sin^2\frac{\theta}{2} - 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\ &= 2\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2} - i\cos\frac{\theta}{2}\right) \\ &= 2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}) - i\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2})\right) \\ &= 2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2})\right) \end{aligned}$$

3. On a donc $Z = \frac{2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}}{2\sin\frac{\theta}{2}e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2})}} = \frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}e^{i\frac{\pi}{2}} = i\text{cotan}\frac{\theta}{2}$

Exercice 6 :

Soit la fonction $f(t) = \lambda e^{i\omega t} + \mu e^{-i\omega t}$, où ω est un nombre réel, tandis que λ et μ sont des nombres complexes.

1. Quelle condition doivent vérifier λ et μ pour que $f(t)$ soit une une fonction réelle ?
2. Montrer que, dans ce cas, $f(t)$ peut se mettre sous la forme $A\cos(\omega t+\phi)$ et exprimer A et ϕ en fonction des données.

Solution:

1. Un complexe est réel si et seulement si il est égal à son conjugué, donc $\lambda e^{i\omega t} + \mu e^{-i\omega t} = \overline{\lambda} e^{-i\omega t} + \overline{\mu} e^{i\omega t}$. En identifiant les termes, on voit que $f(t)$ est réel si $\lambda = \overline{\mu}$.
2. En utilisant la question précédente, posons $\lambda = \rho e^{i\phi}$ et $\mu = \rho e^{-i\phi}$. Dans ce cas, nous avons

$$\begin{aligned} f(t) &= \lambda e^{i\omega t} + \mu e^{-i\omega t} \\ &= \rho \left(e^{i(\omega t + \phi)} + e^{-i(\omega t + \phi)} \right) \\ &= 2\rho \cos(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

Donc $f(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ avec $A = 2|\lambda|$ et $\phi = arg(\lambda)$.

Exercice 7 :

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes de modules 1, avec $z_1 z_2 \neq -1$. Démontrer que le nombre complexe $z = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ est réel.

Solution: Puisque $|z_1| = |z_2| = 1$, on a $z_1 = e^{i\theta_1}$ et $z_2 = e^{i\theta_2}$. Donc :

$$\begin{aligned} z &= \frac{e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2}}{1 + e^{i(\theta_1 + \theta_2)}} \\ &= \frac{e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2}}{1 + e^{i(\theta_1 + \theta_2)}} \left(\frac{1 + e^{-i(\theta_1 + \theta_2)}}{1 + e^{-i(\theta_1 + \theta_2)}} \right) \\ &= \frac{e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2} + e^{-i\theta_1} + e^{-i\theta_2}}{2 + e^{i(\theta_1 + \theta_2)} + e^{-i(\theta_1 + \theta_2)}} \\ &= \frac{\cos\theta_1 + \cos\theta_2}{1 + \cos(\theta_1 + \theta_2)} \end{aligned}$$

Notons que $\theta_1 + \theta_2 \neq \pi + 2k\pi$

Exercice 8 :

Soient x, y et z trois nombres complexes de module 1. Montrer que $|x + y + z| = |xy + yz + zx|$.

Solution: Posons $x = e^{i\theta_1}$, $y = e^{i\theta_2}$ et $z = e^{i\theta_3}$. Notons $r = |x+y+z|$ et $\rho = |xy+yz+zx|$. On a

$$\begin{aligned} r^2 &= (x+y+z)(\overline{x+y+z}) \\ &= (e^{i\theta_1}+e^{i\theta_2}+e^{i\theta_3})(e^{-i\theta_1}+e^{-i\theta_2}+e^{-i\theta_3}) \\ &= 3+2\cos(\theta_1-\theta_2)+2\cos(\theta_1-\theta_3)+2\cos(\theta_2-\theta_3) \end{aligned}$$

et on a

$$\begin{aligned} \rho^2 &= (xy+yz+zx)(\overline{xy+yz+zx}) \\ &= (e^{i(\theta_1+\theta_2)}+e^{i(\theta_2+\theta_3)}+e^{i(\theta_3+\theta_1)})(e^{-i(\theta_1+\theta_2)}+e^{-i(\theta_2+\theta_3)}+e^{-i(\theta_3+\theta_1)}) \\ &= 3+2\cos(\theta_1-\theta_2)+2\cos(\theta_1-\theta_3)+2\cos(\theta_2-\theta_3) \end{aligned}$$

On a donc $|x+y+z| = |xy+yz+zx|$

Exercice 9 :

Soient a et b de module 1, $a \neq b$, et $z \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$Re(\frac{z+ab\overline{z}-a+b}{a-b}) = -1$$

Solution: Posons $Z = \frac{z+ab\overline{z}-a+b}{a-b}$. Alors

$$Z+\overline{Z} = \frac{z+ab\overline{z}-a+b}{a-b} + \frac{\overline{z}+\overline{a}\overline{b}z-\overline{a}+\overline{b}}{\overline{a}-\overline{b}}$$

Puisque a et b sont de module 1, on a $\overline{a} = \frac{1}{a}$ et $\overline{b} = \frac{1}{b}$. Ainsi

$$\begin{aligned} Z+\overline{Z} &= 2\mathrm{Re}(Z) \\ &= \frac{z+ab\overline{z}-a+b}{a-b} + \frac{\overline{z}+\frac{1}{ab}z-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}} \\ &= \frac{z+ab\overline{z}-a+b}{a-b} + \frac{z+ab\overline{z}-b+a}{b-a} \\ &= -2 \end{aligned}$$