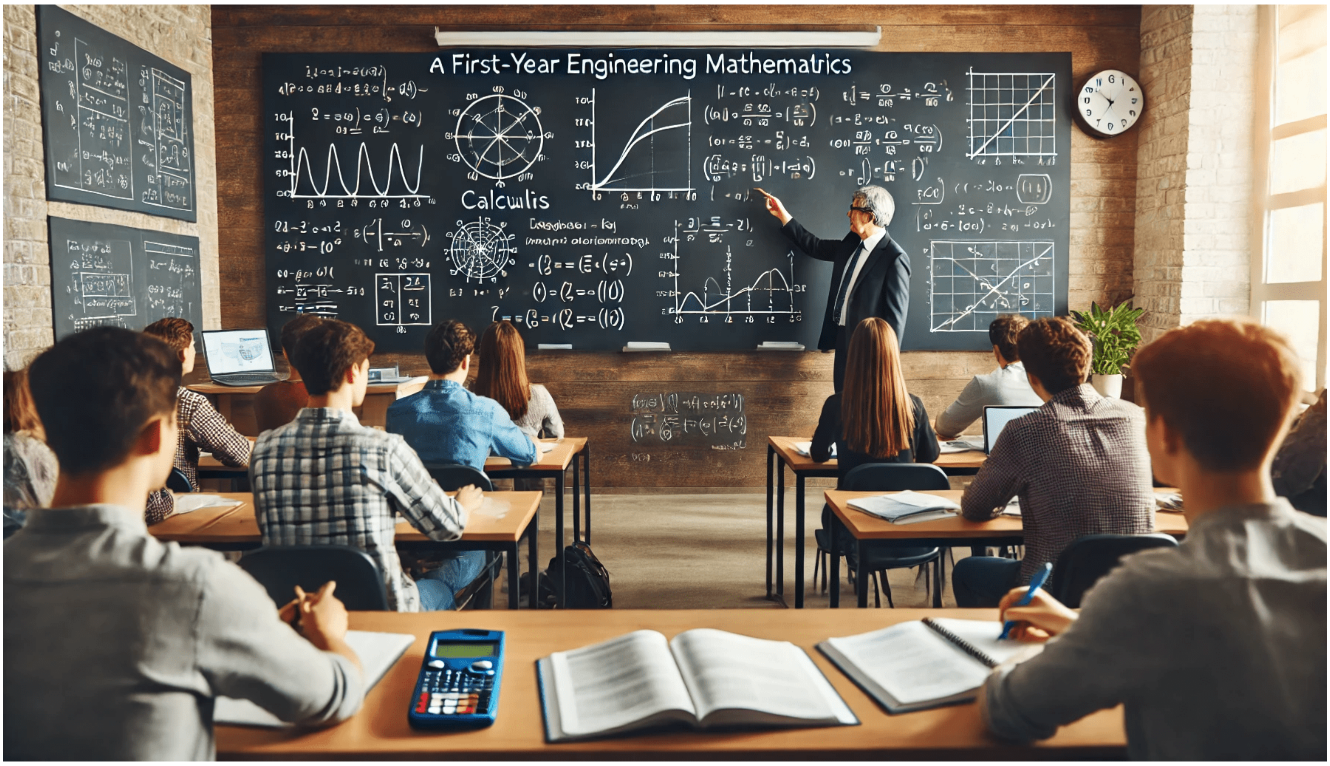
Rappels Mathématiques

Guillaume Chivot



Ce cours a pour but de rappeler les notions de bases essentielles pour la compréhension des cours de mathématiques de cette année.

1 Calcul algébrique

1.1 Écriture fractionnaire

Dans cette partie, nous rappelons ce qu'est une fraction, ainsi que les calculs qui lui sont associés. Commençons par rappeler quelques définitions :

Définition 1

Soit une fraction de la forme $\frac{a}{b}$ où a et b sont des nombres réels, alors

— a est appelé le numérateur de la fraction $\frac{a}{b}$.

— b est appelé le dénominateur de la fraction $\frac{a}{b}$.

Proposition 1

On ne change pas la valeur d'une fraction en multipliant (ou en divisant) son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul. Autrement dit, si a, b et k sont trois nombres relatifs (avec b et k différents de 0) :

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}$$

Illustrons la proposition précédente par quelques exemples :

$$\frac{-4}{9} = \frac{-4 \times 3}{9 \times 3} = \frac{-12}{27}$$

$$\frac{28}{-35} = \frac{28 \div 7}{-35 \div 7} = \frac{4}{-5}$$

$$\frac{17}{2.5} = \frac{17 \times 10}{2.5 \times 10} = \frac{170}{25}$$

On peut également simplifier des fractions :

$$\frac{-24}{39} = \frac{-8 \times 3}{13 \times 3} = \frac{-8}{13}$$

$$\frac{30}{-42} = \frac{6 \times 5}{-7 \times 6} = \frac{5}{-7}$$

$$\frac{2 \times 3 \times 5 \times 7}{3 \times 7 \times 11} = \frac{10}{11}$$

Exercice 1

Simplifier au maximum chacune des fractions suivantes

1. $\frac{56}{64}$
2. $\frac{63}{75}$
3. $\frac{28}{49}$
4. $\frac{26}{74}$
5. $\frac{6\times15}{6\times35}$
6. $\frac{18\times21}{45\times21}$
7. $\frac{28\times56}{16\times28}$

Proposition 2: Produits en croix et égalité de fractions

Si a, b, c et d sont quatre nombres relatifs (avec b et d différents de 0) :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \times d = b \times c$$

$$a \times d = b \times c \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Méthode :

Le produit en croix permet de déterminer si deux fractions sont égales :

$$\frac{-12}{27} = \frac{52}{-117} \quad \text{car}$$
$$(-12) \times (-117) = 1404 \quad \text{et} \quad 27 \times 52 = 1404$$

En procédant de la même façon, on peut montrer que

$$\frac{75025}{46368} \neq \frac{196418}{121393}$$

Proposition 3

Pour multiplier deux nombres en écriture fractionnaire, on multiplie les numérateurs entre eux, puis on multiplie les dénominateurs entre eux.
Si a, b, c et d sont quatre nombres relatifs (avec b et d différents de 0) :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Voici quelques exemples :

$$5 \times \frac{-4}{9} = \frac{5 \times -4}{1 \times 9} = \frac{-20}{9}$$
$$\frac{7}{5} \times \frac{-4}{3} = \frac{7 \times -4}{5 \times 3} = \frac{-28}{15}$$
$$\frac{24}{-35} \times \frac{14}{16} = \frac{24 \times 14}{-35 \times 16} = \frac{3}{5}$$

Exercice 2

Déterminer si ces deux fractions sont égales :

$$\frac{3}{4} \quad \text{et} \quad \frac{6}{8}$$
$$\frac{7}{9} \quad \text{et} \quad \frac{14}{18}$$
$$\frac{5}{12} \quad \text{et} \quad \frac{15}{36}$$
$$\frac{2}{5} \quad \text{et} \quad \frac{4}{9}$$
$$\frac{256}{384} \quad \text{et} \quad \frac{128}{192}$$
$$\frac{512}{768} \quad \text{et} \quad \frac{1024}{1536}$$
$$\frac{275}{550} \quad \text{et} \quad \frac{325}{650}$$
$$\frac{125}{225} \quad \text{et} \quad \frac{150}{270}$$

Définition 2

Deux nombres (non nuls) seront dits inverses l'un de l'autre lorsque leur produit est égal à 1.
Si a est un nombre relatif non nul, son inverse est $\frac{1}{a}$, qui se note aussi a^{-1}.
Si a et b sont deux nombres relatifs non nuls, l'inverse de $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$.

Définition 3

Pour tous nombres relatifs a et b non nuls :

$$a \times \frac{1}{a} = \frac{a}{a} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$$

Quelques exemples :

— 2,5 et 0,4 sont deux nombres inverses l'un de l'autre, car $2,5 \times 0,4 = 1$

— L'inverse de -8 est $\frac{1}{-8} = -0,125$

— L'inverse de $\frac{2}{3}$ est $\frac{3}{2}$

— L'inverse de 0,6 est $\frac{5}{3}$

— L'inverse de 5 est 0,2 ; ainsi, on a, par exemple, $\frac{23}{5} = 23 \times 0,2 = 4,6$

— L'inverse de 0,25 est 4 ; ainsi, on a, par exemple, $\frac{3}{0{,}25} = 3 \times 4 = 12$

Proposition 4

Diviser par une fraction revient à multiplier par l'inverse de cette fraction.
Si a, b, c et d sont des nombres relatifs (b, c et d non nuls), alors on a

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Exemples :

$$5 \div \frac{3}{4} = 5 \times \frac{4}{3} = \frac{20}{3}$$
$$\frac{-2}{3} \div 5 = \frac{-2}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{-2}{15}$$
$$\frac{3}{7} \div \frac{4}{9} = \frac{3}{7} \times \frac{9}{4} = \frac{27}{28}$$

Proposition 5

Pour additionner (ou soustraire) des fractions ayant le même dénominateur, il suffit de conserver le dénominateur commun, et d'additionner (ou soustraire) les numérateurs entre eux.
Si a, b et c sont des nombres relatifs (b non nul), on a

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

Quand les dénominateurs sont les mêmes, l'opération est simple :

$$\frac{3}{4} + \frac{21}{4} = \frac{3+21}{4} = \frac{24}{4} = 6$$
$$\frac{-4}{3} + \frac{17}{3} = \frac{-4+17}{3} = \frac{13}{3}$$
$$\frac{15}{7} - \frac{4}{7} = \frac{15-4}{7} = \frac{11}{7}$$

Pour additionner (ou soustraire) des fractions ayant des dénominateurs différents, on commence par les réduire au même dénominateur, avant d'appliquer la règle précédente.

$$\frac{3}{4} + \frac{21}{8} = \frac{3 \times 2}{4 \times 2} + \frac{21}{8} = \frac{6}{8} + \frac{21}{8} = \frac{27}{8}$$
$$\frac{-5}{6} + \frac{7}{4} = \frac{-5 \times 2}{6 \times 2} + \frac{7 \times 3}{4 \times 3} = \frac{-10}{12} + \frac{21}{12} = \frac{11}{12}$$
$$\frac{-3}{7} + \frac{5}{8} = \frac{-3 \times 8}{7 \times 8} + \frac{5 \times 7}{8 \times 7} = \frac{-24}{56} + \frac{35}{56} = \frac{11}{56}$$

$$\frac{-11}{6} + 3 = \frac{-11}{6} + \frac{3 \times 6}{1 \times 6} = \frac{-11}{6} + \frac{18}{6} = \frac{7}{6}$$

Exercice 3

Calculer et donner le résultat de chaque expression sous la forme la plus simple.

$$A = \frac{7}{5} - \frac{3}{5} \times \frac{4}{21},$$
$$B = -\frac{13}{7} + \frac{3}{7} \div \frac{5}{3}$$
$$C = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3} - 1\right)$$
$$D = \frac{2}{3} + \frac{1}{6}\frac{2 - \frac{1}{2}}{1}$$

1.2 Puissances d'un nombre

Définition 4

Soient n un entier supérieur ou égal à 1 et a un nombre relatif.

$$a^n = a \times a \times \cdots \times a \quad (n \text{ facteurs})$$

a^n se lit a puissance n ou a exposant n .

Exemples :

$$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32 \qquad 2000^1 = 2000$$
$$(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9 \qquad (-3)^3 = (-3) \times (-3) \times (-3) = -27$$
$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2 \times 2 \times 2}{3 \times 3 \times 3} = \frac{8}{27} \qquad 0^3 = 0 \qquad 5^0 = 1$$

Remarque : a^2 se lit « a au carré » ; a^3 se lit « a au cube ».

Attention :
À ne pas confondre $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ et $3 \times 2 = 2 + 2 + 2 = 6$.

Proposition 6: Règle de calcul

Soient n et p deux entiers supérieurs ou égaux à 1 et a un nombre relatif.

$$a^n \times a^p = a^{n+p} \quad \text{(On somme les deux exposants.)}$$

Exemples :

$$2^3 \times 2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^7$$
$$5^2 \times 5^1 = 5 \times 5 \times 5 = 5^3$$

$$3^6 \times 3^2 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^8$$

Remarque :

$$8^3 \times 8^2 \times 8^4 = 8^{3+2+4} = 8^9 \quad \text{Il y a en tout 9 facteurs 8.}$$

Attention :

$$5^2 \times 4^3 = 5 \times 5 \times 4 \times 4 \times 4 \quad \text{Ce ne sont pas les mêmes facteurs.}$$

On ne peut pas l'écrire sous forme d'une seule puissance.

Attention :

$$3^6 + 3^2 = \text{C'est une somme.}$$

On ne peut pas l'écrire sous forme d'une seule puissance.

Définition 5

Soient n un entier et a un nombre relatif non nul.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Exemples :

$$2^3 \times \frac{1}{2^3} = 2 \times 2 \times 2 \times \frac{1}{2 \times 2 \times 2} = 1$$

$$2^3 \times 2^{-3} = 2^{3+(-3)} = 2^0 = 1 \quad \text{donc} \quad 2^{-3} = \frac{1}{2^3}$$

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} \qquad 5^{-1} = \frac{1}{5^1} = \frac{1}{5}$$

Proposition 7: Règle de calcul

Soient n et p deux entiers et a un nombre relatif non nul.

$$\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$$

Exemples :

$$\frac{2^5}{2^2} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2} = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$$

$$\frac{3^4}{3^6} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{1}{3 \times 3} = \frac{1}{3^2} = 3^{-2}$$

$$\frac{4^3}{4^1} = \frac{4 \times 4 \times 4}{4} = 4^2$$
$$\frac{5^8}{5^3} = 5^{8-3} = 5^5$$
$$\frac{7^{24}}{7} = 7^{24-1} = 7^{23}$$
$$\frac{11^3}{11^7} = 11^{3-7} = 11^{-4} = \frac{1}{11^4}$$

Proposition 8: Règle de calcul

Soient n un entier, a et b deux nombres non nuls.

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Exemples :

$$(2 \times 3)^4 = 2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2 \times 3 = 2^4 \times 3^4$$
$$4^3 \times 7^3 = (4 \times 7)^3 = 28^3$$
$$\frac{36^7}{3^7} = \left(\frac{36}{3}\right)^7 = 12^7$$

Exercice 4

Simplifiez les expressions suivantes :

1. $2^5 \times 2^3$
2. $5^7 \div 5^4$
3. $(3^2)^4$
4. $7^0 + 4^0$
5. $\frac{8^5}{8^2}$
6. $10^{-3} \times 10^5$
7. $\left(\frac{2^4}{2^2}\right)^3$
8. 9^{-2}

Proposition 9: Puissance de 10

Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

$$10^n = 10 \times 10 \times \cdots \times 10 = 1 \text{ suivi de } n \text{ zéros}$$
$$10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \frac{1}{100\cdots0} = 0,00\cdots01 \quad \text{(n chiffres après la virgule)}$$

Exemples :

$$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000 \qquad 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0,01$$

$$10^5 = 100000 \qquad 10^{-4} = 0,0001$$

$$10^0 = 1 \qquad 10^1 = 10 \qquad 10^{-1} = 0,1$$

Proposition 10

Soit n un entier positif.

— Pour multiplier un nombre décimal par 10^n, on déplace la virgule de n rangs vers la droite.

— Pour multiplier un nombre décimal par 10^{-n}, on déplace la virgule de n rangs vers la gauche.

Exemples :

$$25,1 \times 10^5 = 2\,510\,000$$

$$25,1 \times 10^{-5} = 0,000251$$

1.3 Écriture scientifique

Définition 6

L'écriture (ou notation) scientifique d'un nombre relatif est l'écriture de ce nombre sous la forme $a \times 10^n$, où a est un nombre décimal ayant un seul chiffre non nul avant la virgule et n est un entier relatif.

Exemples :

$A = 8,56 \times 10^7$ (A est écrit en notation scientifique.)

$B = 0,45 \times 10^{-2}$ (B n'est pas écrit en notation scientifique car le chiffre avant la virgule est 0.)

$C = 9,1 \times 53$ (C n'est pas écrit en notation scientifique car le 2ième facteur n'est pas une puissance de 10.)

Écrire en notation scientifique :

$$D = 732 = 7,32 \times 10^2$$

$$E = 0,043 = 4,3 \times 10^{-2}$$

$$F = 345\,756 = 3,45756 \times 10^5$$

$$G = 0,000\,673 = 6,73 \times 10^{-4}$$

$$H = 345 \times 10^3 = 3,45 \times 10^2 \times 10^3 = 3,45 \times 10^5$$

$$I = 0,0673 \times 10^4 = 6,73 \times 10^{-2} \times 10^4 = 6,73 \times 10^2$$

Comparer :

a) $A = 6,04 \times 10^5$ et $B = 2,03 \times 10^7$ $\quad A < B$ car $5 < 7$

b) $A = 9,1 \times 10^{-3}$ et $B = 8,4 \times 10^{-2}$ $\quad A < B$ car $-3 < -2$

c) $A = 4,51 \times 10^7$ et $B = 6,7 \times 10^7$ $\quad A < B$ car $7 = 7$ et $4,51 < 6,7$

Remarque : On compare d'abord les puissances, puis en cas d'égalité, on compare les nombres décimaux.

Exemples :

a) Effectuer à la calculatrice $623\,452 \times 786\,549$.

$$\text{On obtient } 4.903755471\text{E}11.\text{Cela signifie } 4,903\,755\,71 \times 10^{11}.$$

Quand le nombre est trop grand, la calculatrice donne la valeur la plus précise possible en utilisant une notation scientifique.

b) Effectuer à la calculatrice $0,012\,345 \div 915\,234$.

$$\text{On obtient } 1.34883538\text{E} - 8.\text{Cela signifie } 1,348\,835\,38 \times 10^{-8}.$$

2 Fonction exponentielle de base e

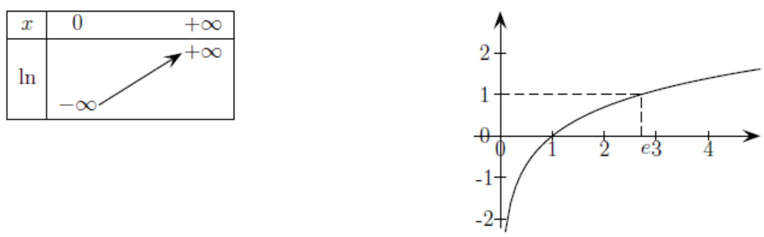


Figure 1 – Tableau de variation et représentation graphique de la fonction logarithme.

La fonction $\ln(x)$ varie de $-\infty$ à $+\infty$ lorsque $x \in]0; +\infty[$, il existe de même toujours une unique solution à l'équation $\ln(x) = a$ pour tout $a > 0$.

Définition 7

Pour tout nombre a, on note $\exp(a)$ le nombre réel, que l'on appelle l' exponentielle de a , qui est l'unique solution de l'équation $\ln(x) = a$.

Corollaire 1

— $\exp(0) = 1$ car $\ln(1) = 0$

— $\exp(1) = e$ car $\ln(e) = 1$

— Plus généralement : $\exp(x) = y \Leftrightarrow x = \ln(y)$: les fonctions exp et ln sont des fonctions réciproques.

On sait que, pour tout entier relatif n, $\ln(e^n) = n$, et donc que $\exp(n) = e^n$. On généralise cette notation à tous les nombres réels : $\exp(x) = e^x$. La fonction exponentielle associe à un nombre réel x la puissance x du nombre e. On parle pour cette raison de fonction exponentielle de base e .

Comme $\exp(x) = e^x$ est une puissance, on retrouve aussi les propriétés des puissances pour l'exponentielle : pour tout réel a et tous entiers n et n' on a $a^n a^{n'} = a^{n+n'}$, soit pour l'exponentielle :

Proposition 11

Pour tous réels a et b, $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$.

Démonstration :
Soient a et b deux réels, on a : $\ln(\exp(a+b)) = a+b$ d'une part, et d'autre part $a+b = \ln(\exp(a)) + \ln(\exp(b))$. Or $\ln(\exp(a)) + \ln(\exp(b)) = \ln(\exp(a) \times \exp(b))$, et donc, on a $a+b = \ln(\exp(a+b)) = \ln(\exp(a) \times \exp(b))$, d'où le résultat. □

Proposition 12

— $\exp(x) = e^x$
— $\ln(e^a) = a$
— $e^{\ln(b)} = b$
— Pour tous réels x et $y > 0$, $y = e^x \Leftrightarrow \ln(y) = x$
— Pour tout réel x, $e^x > 0$
— $e^{a+b} = e^a e^b$
— $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$
— $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$
— $(e^a)^b = e^{ab}$

Exercice 5

Simplifiez les expressions suivantes :

1. $e^3 \times e^5$
2. $\frac{e^7}{e^2}$
3. $(e^4)^3$
4. $e^0 + e^1$
5. $e^{-2} \times e^5$
6. $\frac{e^6}{e^9}$
7. $e^{2x} \times e^{-x}$

3) Étude de la fonction exponentielle

Les fonctions logarithme népérien et exponentielle sont réciproques l'une de l'autre : pour tout réel x, $\ln(\exp(x)) = x$.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(\exp(x))$, donc $f(x) = x$.
f est une fonction composée, et donc, $f'(x) = \exp'(x)\ln'(\exp(x)) = \exp'(x) \cdot \frac{1}{\exp(x)}$.
D'autre part, comme $f(x) = x$, on a aussi $f'(x) = 1$.
En résumé, on a donc $f'(x) = \frac{\exp'(x)}{\exp(x)} = 1$, ce qui montre que $\exp'(x) = \exp(x)$.

Proposition 13

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa dérivée :

$$\text{pour tout réel } x, \exp'(x) = \exp(x).$$

Corollaire 2

— Pour toute fonction u dérivable, on a $(e^u)' = u' \exp(u)$.

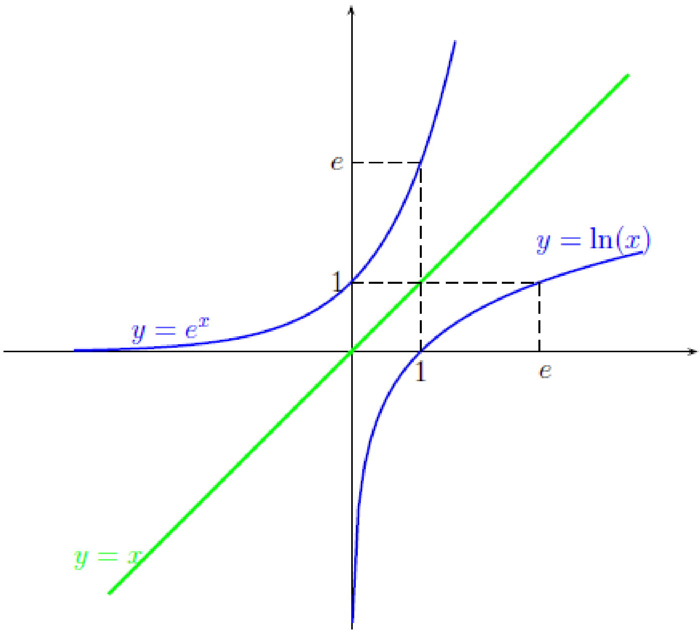
— Comme pour tout réel x, $e^x > 0$, on en déduit que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

En particulier, pour tous réels a et b :

— $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$

— $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

— $e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$



Soit $M(x, y)$ un point de la courbe représentative de la fonction exponentielle, donc tel que $y = e^x$. On a alors que $\ln(y) = x$, et donc le point $M'(y, x)$ est un point de la courbe représentative du logarithme népérien.

Exercice 6

Résolvez les équations suivantes :

1. $e^x = 7$
2. $e^{2x} = 16$
3. $e^{x+3} = 12$
4. $e^{2x} = e^5$
5. $e^{x+1} = e^4$
6. $e^{3x} = 27$
7. $e^{x+2} = 5e^x$

Comme les points $M(x, y)$ et $M'(x', y')$ par la symétrie d'axe la droite $y = x$, les courbes représentatives du logarithme népérien et de l'exponentielle sont symétriques l'une de l'autre par rapport à cette droite.

x	$-\infty$		$+\infty$
$exp'(x) = \exp(x)$		$+$	
exp	0	$\nearrow$	$+\infty$

On déduit ainsi des limites de la fonction logarithme népérien celles de l'exponentielle :

Proposition 14

$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.

La droite d'équation $y = 0$, c'est-à-dire l'axe des abscisses, est asymptote à la courbe représentative de la fonction exponentielle en $-\infty$.

Le graphique précédent permet de plus de comparer le comportement en $+\infty$ des fonctions $x \mapsto \ln(x)$, $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^x$.

On revoit que $\ln(x)$ est négligeable devant x lorsque x tend vers 0 et $+\infty$: $\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

De même, e^x est prépondérant devant x en $-\infty$ et $+\infty$.

Proposition 15

$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$, et $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.
Plus généralement, pour tout entier n, $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$, et $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.

3 Somme de termes et produit de facteurs

Définition 8

— Développer c'est transformer un produit en une somme (ou différence) de termes.
— Factoriser c'est transformer une somme en un produit de facteurs.

Exemple :

$$x(4-y) = 4x - xy$$

Méthode :

Développer une expression

$$A = (x+2)(4x-3) - x(7-x)$$

On développe le membre de gauche en appliquant la double-distributivité et le membre de droite en appliquant la distributivité.

$$A = (x+2)(4x-3) - x(7-x) = 4x^2 - 3x + 8x - 6 - 7x + x^2 = 5x^2 - 2x - 6$$

On dit que la multiplication est distributive par rapport à l'addition (ou la soustraction). Dans l'exemple, on a distribué la multiplication par x sur les termes 4 et y.

Exercice 7

Développer les expressions suivantes

— **Sommes (ou différences) de termes**
  — $x - 3$
  — $(2x+4) + 3x$
  — $(5-x) - (9+9x)$
  — $3 + (2+3x)(x-2)$
— **Produits de facteurs**
  — $(6x+1)(x-1)$
  — $2(1+6x)$
  — $(8-x)(2+x)$
  — $(3+8x)(x-8)^2$

Attention :
Certaines valeurs sont dites "interdites" ! Pour certaines expressions dépendantes de x, il existe des valeurs de x pour lesquelles on ne peut pas calculer l'expression. Prenons l'exemple suivant :

$$A(x) = \frac{5}{4+x}$$

Pour $x = -4$, $4+x = 0$. Il n'est donc pas possible de calculer $A(-4)$. Pour l'expression $A(x)$, x désigne un nombre réel différent de -4.

La notion de valeurs interdites nous amène à une autre notion importante en mathématiques, la notion de domaine de définition . Le domaine de définition de $A(x) = \frac{5}{4+x}$ est $]-\infty, -4[\cup]-4, +\infty[$.

Proposition 16: identités remarquables

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Exemples :

$$(x-5)^2 = x^2 - 2\times x\times 5 + 5^2 = x^2 - 10x + 25$$
$$(2x-1)(2x+1) = (2x)^2 - 1^2 = 4x^2 - 1$$
$$x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2\times 3\times x + 3^2 = (x+3)^2$$

Exercice 8

Développez les expressions suivantes en utilisant les identités remarquables :

1. $(3x+5)^2$
2. $(2x-7)^2$
3. $(4x+3)(4x-3)$
4. $(5x+6y)^2$
5. $(7a-4b)^2$

Exercice 9

Factorisez les expressions suivantes en utilisant les identités remarquables :

1. $x^2 + 6x + 9$
2. $4x^2 - 12x + 9$
3. $16a^2 - 25b^2$
4. $49x^2 - 56xy + 16y^2$
5. $36a^2 - 64b^2$

4 Réduire au même dénominateur

Définition 9

Réduire au même dénominateur c'est transformer une somme (ou une différence) de deux fractions en une seule fraction.

Proposition 17

Pour tout nombre a, b, c, d réels on a :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Méthode :

Prenons l'équation suivante et réduisons la au même dénominateur :

$$\begin{aligned} A &= \frac{7x}{x-2} - \frac{5}{3-x} \\ &= \frac{7x(3-x)}{(x-2)(3-x)} - \frac{5(x-2)}{(x-2)(3-x)} \\ &= \frac{7x(3-x) - 5(x-2)}{(x-2)(3-x)} \\ &= \frac{21x - 7x^2 - 5x + 10}{(x-2)(3-x)} \\ &= \frac{-7x^2 + 16x + 10}{(x-2)(3-x)} \end{aligned}$$

Exercice 10

Réduire l'expression suivante :

$$B = 3 + \frac{5x}{2x+1}$$

5 Équation du premier degré

Theorème 1

Toute équation du premier degré peut se mettre sous la forme :

$$ax = b$$

— Si $a \neq 0$ alors l'équation a une unique solution $x = \frac{b}{a}$.
— Si $a = 0$ et $b = 0$ alors tout x est solution $S = \mathbb{R}$.
— Si $a = 0$ et $b \neq 0$ alors l'équation n'a pas de solution $S = \emptyset$.

Exemple : Soit l'équation suivante :

$$\frac{x+2}{3} - \frac{3(x-2)}{4} = \frac{-7x+2}{12} + 2$$

Pour éviter de "traîner" des dénominateurs, multiplions par le dénominateur commun, ici 12 :

$$(\times 12) \quad 4(x+2) - 9(x-2) = -7x + 2 + 24$$

$$4x + 8 - 9x + 18 = -7x + 2 + 24$$

$$4x - 9x + 7x = -8 - 18 + 2 + 24$$

$$2x = 0$$

$$x = 0$$

On conclut par l'ensemble solution : $S = \{0\}$.

Exercice 11

Résoudre les équations suivantes :

$$\frac{x-3}{2x-4} = \frac{x-2}{2x-5}$$
$$-\frac{4}{x-4} + \frac{1}{x} = \frac{-3}{x-3}$$
$$(x-1)(2x+3) = (x-1)(x-6)$$
$$(5x+2)^2 = (x+1)^2$$

6 Équation du second degré dans $\mathbb{R}$

Définition 10

Une équation de degré 2, d'inconnue x, sous forme développée, s'écrit $ax^2 + bx + c = 0$, où a, b et c sont des nombres connus avec $a \neq 0$.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ une équation d'inconnue x, c'est trouver les solutions réelles, c'est-à-dire les valeurs des réels x qui rendent l'égalité correcte.

Exemple : $3x^2 - 2x - 5 = 0$ est une équation de degré 2.

— En remplaçant x par 1 dans $3x^2 - 2x - 5$, on obtient -4. Le nombre 1 ne rend pas l'égalité correcte. Donc 1 n'est pas une solution de l'équation $3x^2 - 2x - 5 = 0$.

— Tandis que, en remplaçant x par -1 dans $3x^2 - 2x - 5$, on obtient 0. Le nombre -1 vérifie l'égalité. Donc -1 est une solution de l'équation $3x^2 - 2x - 5 = 0$.

Définition 11

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$. On dit que α est une racine de $f(x)$ si $f(\alpha) = 0$.

Dans l'exemple précédent $f(x) = 3x^2 - 2x - 5 = 0$, $\alpha = -1$ est une racine de $f(x)$.

Méthode :

Pour résoudre dans $\mathbb{R}$ $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$.
On calcule le discriminant $b^2 - 4ac$, noté Δ, puis il suffit de regarder le signe de Δ pour pouvoir conclure, en utilisant le tableau suivant :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

— Si $\Delta < 0$ (son signe est -), on peut conclure : l'équation n'a aucune solution réelle. $S = \emptyset$

— Si $\Delta = 0$, on peut conclure : l'équation a une solution unique réelle, calcul de cette solution :

$$x' = x'' = \frac{-b}{2a}$$

$S = \left\{\frac{-b}{2a}\right\}$

— Si $\Delta > 0$ (son signe est +), on peut conclure : l'équation a deux solutions réelles, calcul de ces solutions :

$$x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Exercice 12

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

— $2x^2 - 3x + 5 = 0$

— $4x^2 + 4x + 1 = 0$

— $4x^2 - 3x - 10 = 0$

Inéquations

Proposition 18

— Si l'on ajoute ou soustrait un même nombre à chaque membre d'une inéquation, on obtient une inéquation équivalente (c'est-à-dire qui a les mêmes solutions).

— Si l'on multiplie ou divise chaque membre d'une inéquation par un nombre strictement positif, on obtient une inéquation équivalente.

— Si l'on multiplie ou divise chaque membre d'une inéquation par un nombre strictement négatif, on obtient une inéquation équivalente en changeant le sens de l'inégalité.

Méthode :

Pour résoudre l'inéquation $-3x + 5 > 0$, on soustrait 5 à chaque membre :

$$-3x + 5 - 5 > 0 - 5 \implies -3x > -5.$$

Comme -3 est négatif, on divise chaque membre par -3 en changeant le sens de l'inégalité :

$$x < \frac{5}{3}.$$

Donc $S =]-\infty; \frac{5}{3}[$.

Remarques

En appliquant le théorème précédent à l'expression $ax + b$, on obtient :

$$ax + b > 0 \iff ax > -b \iff x > -\frac{b}{a} \quad \text{si } a > 0,$$

et

$$ax + b > 0 \iff ax > -b \iff x < -\frac{b}{a} \quad \text{si } a < 0.$$

Proposition 19: Inéquation produit

Un produit de facteurs $A(x)B(x)$ est positif ou nul si et seulement si les deux facteurs $A(x)$ et $B(x)$ sont de même signe. Ce produit est négatif ou nul si et seulement si les deux facteurs $A(x)$ et $B(x)$ sont de signes contraires.

Exercice 13

Résoudre l'inéquation $(x-5)(-3x+4) \geq 0$.

Proposition 20: Inéquation quotient

Un quotient $\frac{A(x)}{B(x)}$ est défini si et seulement si son dénominateur $B(x)$ est non nul. S'il est défini, il est positif ou nul si et seulement si $A(x)$ et $B(x)$ sont de même signe, et il est négatif ou nul si et seulement si les deux facteurs $A(x)$ et $B(x)$ sont de signes contraires.

Exercice 14

Résoudre l'inéquation $\frac{2x-5}{x+2} \geq 0$.