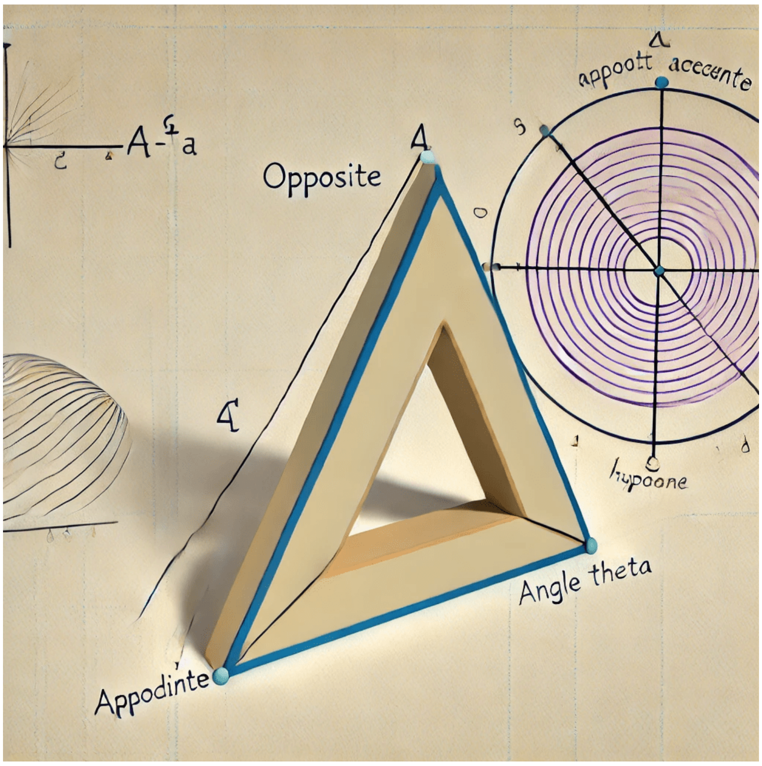
Trigonométrie

Guillaume Chivot



1 Notions de base

La trigonométrie est l'étude des relations entre les distances et les angles dans les triangles à travers les fonctions trigonométriques sinus, cosinus et tangente. C'est une branche très ancienne des mathématiques dont les premières traces remontent au temps des babyloniens. Bien que le but premier soit du décrire des triangles, elle est indissociable de la notion de cercle, notamment de cercle trigonométrique.

Exercice 1

Soit un triangle rectangle avec un angle θ, une hypoténuse de longueur 10, et un côté adjacent à θ de 8. Trouvez :
— $\sin(\theta)$
— $\cos(\theta)$
— $\tan(\theta)$

Exercice 2

Une échelle de 5 mètres est appuyée contre un mur. Si l'angle entre l'échelle et le sol est de 60°, à quelle hauteur le sommet de l'échelle touche-t-il le mur ?

1.1 Le cercle en trigonométrie

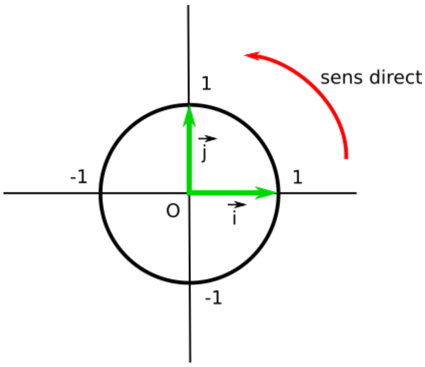


FIGURE 1 – Représentation d'un cercle trigonométrique et du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ associé.

On appelle cercle trigonométrique, un cercle de rayon 1. Ce cercle permet d'illustrer les notions d'angles trigonométriques, que l'on peux exprimer en degré (noté ° et allant 0 à 360) ou en radian (que l'on détaillera un peu plus loin). Pour exprimer un angle sur un cercle trigonométrique, nous avons besoin de deux points sur ce cercle, mais aussi d'un sens.

Définition 1

Sur un cercle, on appelle

- sens direct, sens positif ou sens trigonométrique le sens contraire des aiguilles d'une montre.
- sens indirect, sens négatif ou sens anti-trigonométrique le sens des aiguilles d'une montre.

Dans la pratique, pour eviter de choisir deux points arbitraires, on choisit de définir un angle par rapport à un repère. Cela nous permet de donner une définition précise d'un cercle trigonométrique.

Définition 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orienté dans le sens direct, le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1.

Ainsi, un angle est toujours mesurer en un point M et les coordonnées $(1, 0)$ dans le repère associé.

Exercice 3

Sur un cercle trigonométrique muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orienté dans le sens direct, placé les points d'angle 90°, 180° et 315°. Refaire la même chose, mais dans un repère orienté dans le sens indirect.

1.2 Le radian

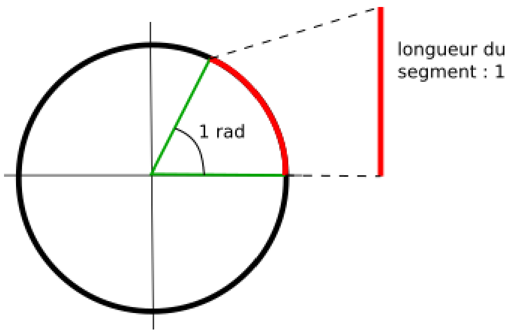


FIGURE 2 – Représentation d'un radian. Le trait rouge droit est l'arc formé par l'angle, que l'on a "déplié".

Si, dans la vie de tous les jours, on définit un angle en degré, en mathématique, il est toujours défini en radian et nous allons voir pourquoi. La longueur du cercle trigonométrique, c'est à dire son périmètre, est égale à 2π, valeur que l'on peut retrouver grâce à différentes méthodes. Ainsi, à un tour complet sur le cercle, on peut faire correspondre le nombre réel 2π. On définit alors une nouvelle unité d'angle : le radian, tel qu'un tour complet mesure 2π radians.

Définition 3

On appelle radian, noté *rad*, la mesure de l'angle que l'on définit comme la longueur de l'arc formé par cet angle sur un cercle trigonométrique.

Ainsi, à 2π radians (tour complet), on fait correspondre un angle de 360°. Par proportionnalité, on obtient les correspondances suivantes :

Angle en degré	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°
Angle en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

Attention :
Les angles en radians ne sont pas limités à la valeur 2π. Prenons l'angle $\frac{9\pi}{4} > 2\pi$, celui-ci peut s'écrire $\frac{9\pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{4}$. On a donc effectué un tour complet du cercle auquel on ajoute un angle $\frac{\pi}{4}$. Un angle en radian se définit toujours modulo 2π

Attention :
La mesure d'un angle dans le sens indirect est compté négativement. Par exemple, l'angle $\frac{3\pi}{2}$ peut également s'écrire $-\frac{\pi}{2}$.

Comme un angle, en radian, à une infinité de solutions, on pose la règle suivante :

Définition 4

La mesure principale d'un angle orienté est la mesure, qui parmi toutes les autres, se situe dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$

Exercice 4

Donner la mesure principale des angles orientés : $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{100\pi}{5}$

2 Sinus, cosinus et tangente d'un angle

Pour définir un angle que nous nommerons θ sur un cercle trigonométrique, il est commun d'avoir à utiliser les fonctions sinus, cosinus et tangente. Si elles servent, à la base, à définir les angles d'un triangle rectangle, leur définition est aisée sur ce cercle.

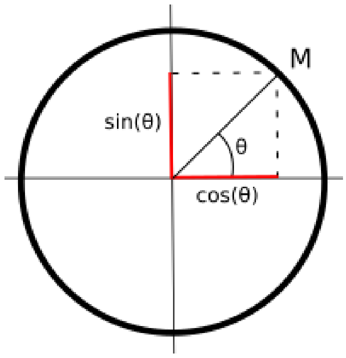


FIGURE 3 – Représentation des fonctions sinus et cosinus d'un angle θ sur un cercle trigonométrique.

Définition 5

Si l'on nomme M le point du cercle d'angle θ

— Le cosinus de l'angle θ est l'abscisse du point M. On le note $\cos\theta$.

— Le sinus de l'angle θ est l'ordonnée du point M. On le note $\sin\theta$.

— La tangente de l'angle θ est le rapport entre le sinus et le cosinus de cet angle. On le note $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$?

Exercice 5

Donner les sinus et cosinus des angles suivants : 0, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$.

De la définition précédente, on peut en déduire des propriétés des fonctions sinus et cosinus.

Proposition 1

— $-1 \leq \cos\theta \leq 1$

— $-1 \leq \sin\theta \leq 1$

— $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

— $\cos(\theta + 2k\pi) = \cos(\theta)$

— $\sin(\theta + 2k\pi) = \sin(\theta)$

Démonstration :

- Par définition, l'abscisse maximum du cercle trigonométrique est 1 et l'abscisse minimum -1.
- Par définition, l'ordonnée maximum du cercle trigonométrique est 1 et l'ordonnée minimum -1.
- Si cos définit l'abscisse du point M et sin son ordonnée, alors cela forme avec le rayon du cercle un triangle rectangle. Le théorème de Pythagore nous donne le résultat attendu.
- Par rotation de 2π, on retombe sur le point M, cela implique que $\cos(\theta+2k\pi) = \cos(\theta)$
- idem

Le tableau suivant donne des valeurs de sinus et cosinus pour différents angle en radians :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Exercice 6

Si $\sin\theta = 0.6$ et $\cos\theta > 0$, trouvez la valeur de $\cos\theta$.

Proposition 2

- $\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta$ et $\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta$
- $\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$ et $\sin(\pi+\theta) = \sin\theta$
- $\cos(\frac{\pi}{2}+\theta) = -\sin\theta$ et $\sin(\frac{\pi}{2}+\theta) = \cos\theta$
- $\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = \sin\theta$ et $\sin(\frac{\pi}{2}-\theta) = \cos\theta$

On peut démontrer, par symétrie, les résultats graphiquement :

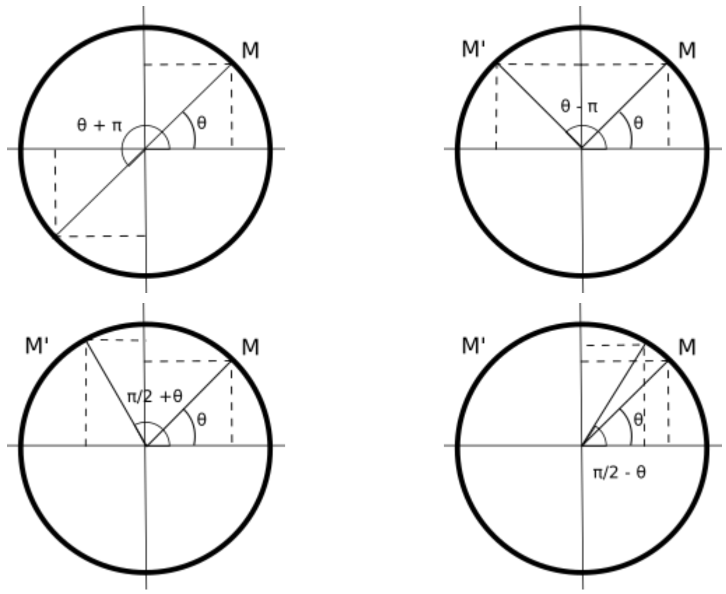


FIGURE 4 – Représentations des symétries des fonctions sinus et cosinus

3 Formules de trigonométrie

Nous allons voir, dans cette partie, les formules usuelles utilisées en trigonométrie. Les plus simples sont les formules d'additions :

Proposition 3: Formules d'addition

— $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

— $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

— $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

— $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

— $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

— $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

Exercice 7

En vous servant de la figure 5, démontrer que $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$. En déduire la formule $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

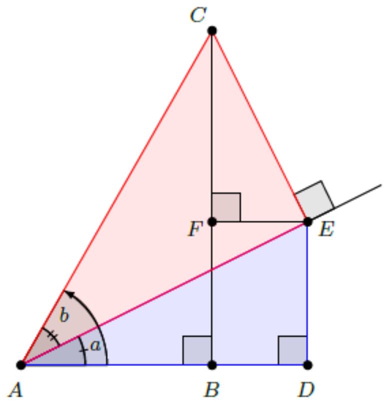


FIGURE 5 –

Démonstration :
On peut démontrer, comme dans l'exercice précédent, les formules $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$. Avec ces formules, on en déduit les formules des tangentes :

$$\begin{aligned}
\tan(a+b) &= \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} \\
&= \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b} \\
&= \frac{\frac{\sin a \cos b}{\cos a \cos b} + \frac{\cos a \sin b}{\cos a \cos b}}{\frac{\cos a \cos b}{\cos a \cos b} - \frac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}} \\
&= \frac{\frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b}}{1 - \frac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}} \\
&= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\tan(a-b) &= \frac{\sin(a-b)}{\cos(a-b)} \\
&= \frac{\sin a \cos b - \cos a \sin b}{\cos a \cos b + \sin a \sin b} \\
&= \frac{\frac{\sin a \cos b}{\cos a \cos b} - \frac{\cos a \sin b}{\cos a \cos b}}{\frac{\cos a \cos b}{\cos a \cos b} + \frac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}} \\
&= \frac{\frac{\sin a}{\cos a} - \frac{\sin b}{\cos b}}{1 + \frac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}} \\
&= \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}
\end{aligned}$$

Proposition 4: Formules de linéarisation (1er partie)

- $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$
- $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$
- $\sin(a)\sin(b) = -\frac{1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)]$

Démonstration :
Evident en utilisant les formules d'additions vu plus haut.

Proposition 5: Formules de linéarisation (2eme partie)

- $\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $\sin(p) - \sin(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\sin(p) + \sin(q) &= \sin(\frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2}) + \sin(\frac{p+q}{2} - \frac{p-q}{2}) \\
&= \sin(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2}) + \cos(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2}) \\
&+ \sin(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2}) - \cos(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2}) \\
&= 2\sin(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})
\end{aligned}$$

Exercice 8

Démontrer les trois dernières formules de linéarisation

4 Exemple : le mouvement cycloïdal

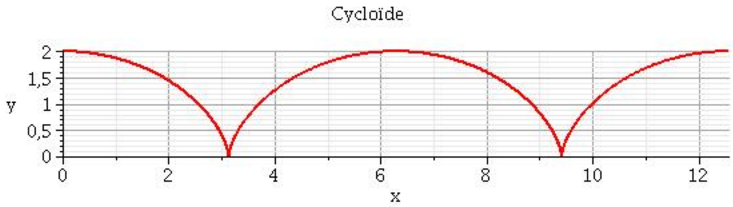


Figure 6 – Graphique d'une fonction cycloïdale.

Considérons le mouvement d'un point A posé sur une roue de velo. Son mouvement est appelé mouvement cycloïdal et est caractérisé par l'équation

$$\overrightarrow{OA} = r(\omega t - \sin \omega t)\overrightarrow{e_x} + r(1 - \cos \omega t)\overrightarrow{e_y}$$

La trajectoire est périodique puisque $r(1 - \cos \omega t)$ reste inchangée lorsque ωt varie de 2π. On peut déduire la vitesse et l'acceleration du point A (on rappelle que la dérivée de la fonction $\sin x$ est $\cos x$ et la dérivée de la fonction $\cos x$ est $-\sin x$) :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v_a} &= r\omega(1 - \cos \omega t)\overrightarrow{e_x} + r\omega \sin \omega t \overrightarrow{e_y} \\ \overrightarrow{a_a} &= r\omega^2 \sin \omega t \overrightarrow{e_x} + r\omega^2 \cos \omega t \overrightarrow{e_y}\end{aligned}$$

Notons que cette fonction possède des points de rebroussement (en $\omega t = 0, 2\pi, ...$), c'est à dire où la vitesse s'annule mais pas l'accélération. La pente de la cycloïde en ces points est donc infinie. On démontre cela en posant :

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} &= \frac{\sin \omega t}{1 - \cos \omega t} \\ &= \frac{2 \sin \frac{\omega t}{2} \cos \frac{\omega t}{2}}{2 \sin^2 \frac{\omega t}{2}} \\ &= \frac{1}{\tan \frac{\omega t}{2}}\end{aligned}$$

Cette fonction tend vers l'infinie quand t tend vers 0.