Equations des droites

Ce TD traite des équations dans un plan. A la fin de ce TD, vous devez savoir :

— Reconnaitre une équation cartésienne et polaire d'une droite.

— Trouver les vecteurs directeurs et normaux à une droite.

1.1 Equation cartesienne d'une droite

Proposition 1

— Toute droite D du plan a au moins une équation cartésienne du type :

$$ax + by + c = 0,$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $(a, b) \neq (0, 0)$.

— Deux telles équations représentent deux droites confondues si, et seulement si, elles sont proportionnelles.

— Le vecteur $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à D.

— Le vecteur $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D.

Méthode :

Soit une droite D définie par deux points $A(1,2)$ et $B(3,5)$. Nous allons chercher l'équation cartésienne de la droite D, ainsi qu'un vecteur normal et un vecteur directeur.
Le vecteur $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est donc un vecteur directeur de la droite D. Soit M un point quelconque de la droite, $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont donc des vecteurs colinéaire. Cela implique que

$$\text{Det}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$$

c'est à dire

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 \\ y-2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$
$$(x-1)3 - (y-2)2 = 3x - 2y + 1 = 0$$

L'équation cartésienne $3x - 2y + 1 = 0$ est donc une équation de la droite D.
On peut en déduire le vecteur normal à la droite $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

1.2 Equation polaire d'une droite

Proposition 2

Soit c un réel non nul. et soient a et b des réels non nul simultanément. Alors, l'équation polaire

$$r = \frac{c}{a\cos\theta + b\sin\theta}$$

est celle d'une droite ne passant pas par l'origine.

Démonstration :
On pose $x = r\cos\theta$et $y = r\sin\theta$. En notant l'équation cartesienne d'une droite $ax + by + c' = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} ax + by + c' &= 0 \\ ar\cos\theta + br\sin\theta + c' &= 0 \\ r(a\cos\theta + b\sin\theta) &= -c' \end{aligned}$$

En prenant $-c' = c$, on obtient

$$r = \frac{c}{a\cos\theta + b\sin\theta}$$

Exercice 1 :

Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère les deux droites $(D_1) : 3x + 2y - 6 = 0$ et $(D_2) : y = \frac{2}{3}x + 2$.

1. Faire une figure !
2. Déterminer un vecteur normal puis un vecteur directeur de (D_1) et (D_2). En déduire que les deux droites sont perpendiculaires.
3. Déterminer les coordonnées cartésiennes du point d'intersection I de (D_1) et (D_2).
4. Trouver les équations polaires de (D_1) et (D_2).

Exercice 2 :

Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère la droite (AB) avec $A(1, 1)$ et $B(-1, -2)$.

1. Déterminer l'équation cartésienne de (AB)
2. Soit (D) la droite d'équation polaire $r = \frac{2}{3\sin\theta + \cos\theta}$.
   (a) Déterminer l'équation cartésienne de (D), en déduire un vecteur directeur et un vecteur normal.
   (b) Représenter les droite (AB) et (D) sur une figure.
   (c) Calculer l'angle formé par les droites (AB) et (D).
3. Déterminer l'équation cartésienne de la droite (Δ) parallèle à (AB) et passant par O.

4. Déterminer l'équation cartésienne de la droite (D') perpendiculaire à (D) et passant par A.

Exercice 3 :

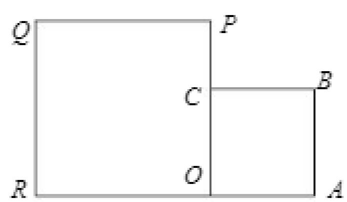
Soit A le point de coordonnées $(2, 1)$ et (D) la droite d'équation cartésienne $x+y-2=0$ dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$

1. Calculer les coordonnées du point H, projection orthogonale de A sur (D) et de A', symétrique de A par rapport à la droite (D).

Exercice 4 :

Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère les droites (D) et (D') d'équations $y = ax + b$ et $y' = a'x + b$. Démontrer que (D) et (D') sont perpendiculaires si et seulement si $aa' = -1$.

Exercice 5 :



On considère la figure ci-dessous, formée de deux carrés $OABC$ et $OPQR$. On construit le point M comme intersection de (AP) et de (BQ). En introduisant un repère convenable, montrer que les points M, C et R sont alignés.

Exercice 6 :

Soit $(ABCD)$ un carré. On construit $P \in (AB)$ et $Q \in (BC)$ tels que $BP = BQ$. Soit H la projection orthogonale de B sur (PC). Montrer que (QH) et (HD) sont orthogonales.