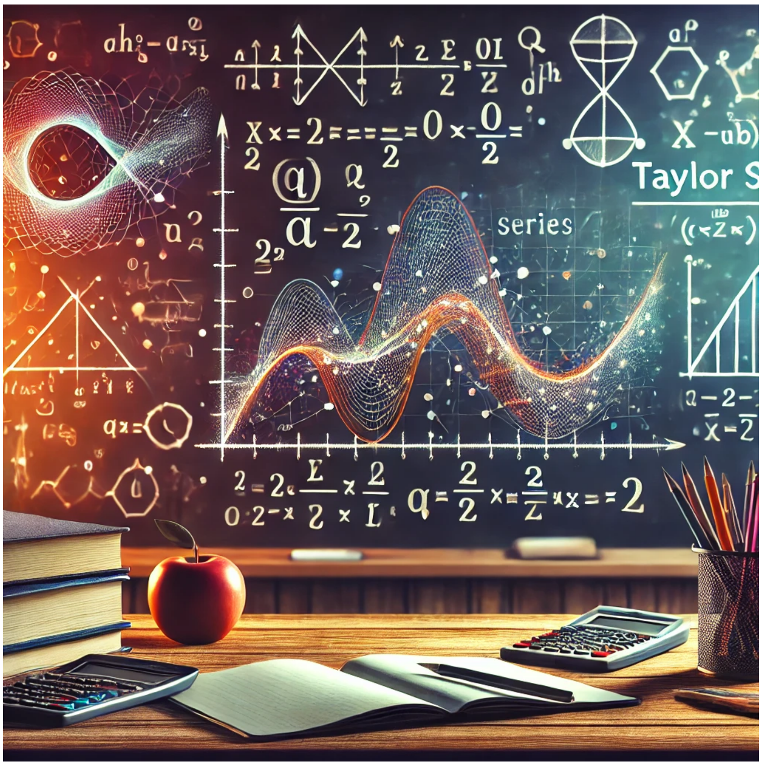
Developpements limités

Guillaume Chivot



0.1 Introduction

Dans ce cours, nous allons voir que l'on peut faire une approximation d'une fonction en un point de cette fonction, grâce à une fonction polynomiale. Ce polynôme sera appelé développement limité de cette fonction. Pour fixer les idées, commençons par donner un exemple simple de développement limité. On sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout x réel différent de 1,

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

En séparant en deux la fraction à droite, on obtient

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}. \tag{19.1}$$

Posons $\varepsilon(x) = \frac{x}{1-x}$. Il est clair que $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$ et l'équation s'écrit

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n \varepsilon(x). \tag{19.2}$$

On dit qu'on a obtenu le développement limité à l'ordre n, au voisinage de 0, de la fonction $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Celui-ci est formé de deux parties :

a) Un polynôme de degré au plus n (ici $1+x+x^2+\cdots+x^n$), qui s'appelle la partie principale du développement limité .

b) Un reste , qui s'écrit sous la forme $x^n\varepsilon(x)$, avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$. Lorsque x tend vers 0, ce terme devient négligeable devant les termes précédents. Le n qui figure dans le $x^n\varepsilon(x)$ s'appelle l' ordre du développement limité .

Définition 1

Un développement limité est une formule d'approximation d'une fonction au voisinage d'un point (ici 0) par un polynôme . On notera souvent développement limité pour développement limité.

En général, contrairement à l'exemple ci-dessus, on ne sait pas exprimer $\varepsilon(x)$ en fonction de x. On sait seulement que $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$. On ne peut donc utiliser un développement limité que lorsqu'on fait une étude locale, c'est-à-dire au voisinage de 0 (quand $x \to 0$).

Attention :
Dans les calculs, on notera $\varepsilon(x)$ toutes les fonctions vérifiant $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$. C'est ainsi que, contrairement à la règle habituelle qui veut que l'on note par des symboles différents des objets différents, on écrira par exemple

$$\varepsilon(x)+\varepsilon(x) = \varepsilon(x), \quad 3\varepsilon(x)+x = \varepsilon(x), \quad \varepsilon\left(2x^2\right) = \varepsilon(x), \quad \varepsilon(x)-\varepsilon(x) = \varepsilon(x), \quad \text{etc.}$$

0.2 Formule de Taylor-Young

Elle donne le développement limité à l'ordre n de n'importe quelle fonction f indéfiniment dérivable au voisinage de 0. Désignons par f', f'', $f^{(3)} = (f'')'$, $f^{(4)} = (f^{(3)})'$, ..., $f^{(n)}$ les dérivées successives de f, et par $n!$ la factorielle, c'est-à-dire le produit de tous les entiers de 1 à n :

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n.$$

Theorème 1 : Formule de Taylor Young

La formule de Taylor-Young s'écrit

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x), \tag{19.3}$$

avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$ et où x est traité au voisinage de 0.

Démonstration :
Elle est une conséquence d'une autre formule de Taylor, la formule de Taylor avec reste intégral. Nous la démontrerons dans le chapitre sur les intégrales.

Méthode :

Donner le développement limité de la fonction $f(x) = e^x$ au voisinage de 0.

Soit $f(x) = e^x$. Alors

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x \\ f''(x) &= e^x \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= e^x \end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $f^{(n)}(0) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la formule de Taylor-Young nous donne le développement limité à l'ordre n de la fonction exponentielle au voisinage de 0 :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x). \tag{19.4}$$

Méthode :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, et soit $f(x) = (1+x)^\alpha$. Alors

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \alpha(1+x)^{\alpha-1} \\
f''(x) &= \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}
\end{aligned}$$

En utilisant la formule de Taylor-Young, on obtient :

$$\begin{aligned}
(1+x)^\alpha =& 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 \\
&+ \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x).
\end{aligned}$$

Exercice 1

Donner le développement limité de $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.

Exercice 2

Donner le développement limité de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.

Fonction	**Développement limité au voisinage de $x = 0$**
$(1+x)^a$	$1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-(n-1))}{n!}x^n + o(x^n)$
$\frac{1}{1-x}$	$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$
$\frac{1}{1+x}$	$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$
$\ln(1-x)$	$-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$\cos(x)$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
$\sin(x)$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$

0.3 Opérations sur les développements limités

Dans les calculs pratiques de développements limités, on utilise rarement la formule de Taylor-Young. On procède plutôt par opérations sur les développement limité usuels, qui doivent être connus.

Substitutions élémentaires

On peut remplacer x par ax^p (avec $a \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$) dans un développement limité au voisinage de 0 car $\varepsilon(ax^p) = \varepsilon(x)$. En effet, si $\varepsilon(x) \to 0$ lorsque x tend vers 0, il en est de même de $\varepsilon(ax^p)$.

Méthode :

Trouver le développement limité de e^{-x^2} à l'ordre 6 au voisinage de 0.

Nous partons du développement limité de e^x à l'ordre 3 au voisinage de 0 :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Remplaçons x par $-x^2$ (ax^p avec $a = -1$ et $p = 2$). Il vient :

$$\begin{aligned} e^{-x^2} &= 1 + (-x^2) + \frac{(-x^2)^2}{2!} + \frac{(-x^2)^3}{3!} + (-x^2)^3\varepsilon(-x^2) \\ &= 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + x^6\varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0. \end{aligned}$$

Exercice 3

Calculer le développement limité de

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

à lordre 4 au voisinage de 0.

Addition de développements limités

On peut additionner (ou soustraire) terme à terme deux développements limités d'ordre n au voisinage de 0 car $x^n\varepsilon(x) + x^n\varepsilon(x) = x^n\varepsilon(x)$.

Méthode :

Trouver le développement limité à l'ordre 5**, au voisinage de** 0**, de**

$$f(x) = \sin 2x - \frac{x}{1-x^2}.$$

On a d'abord $\sin 2x = 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} + x^5\varepsilon(x)$, donc par substitution

$$\begin{aligned}\sin 2x &= 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} + x^5\varepsilon(x)\\ &= 2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 + x^5\varepsilon(x).\end{aligned}$$

Nous avons ensuite besoin du développement limité de $\frac{x}{1-x^2}$ à l'ordre 5, c'est-à-dire du développement limité de $\frac{1}{1-x^2}$ à l'ordre 4. Celui-ci s'obtient par substitution. On part de

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^2\varepsilon(x).$$

En remplaçant x par x^2, on obtient

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^4\varepsilon(x).$$

En multipliant par x, il vient

$$\frac{x}{1-x^2} = x + x^3 + x^5\varepsilon(x).$$

D'où

$$\begin{aligned}f(x) &= \left[2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 + x^5\varepsilon(x)\right] - \left[x + x^3 + x^5\varepsilon(x)\right]\\ &= x - \frac{7}{3}x^3 - \frac{11}{15}x^5 + x^5\varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.\end{aligned}$$

Exercice 4

Trouver le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de 0, de la fonction :

$$f(x) = \sin x + \ln(1+x).$$

Multiplication de deux développements limités

On obtient le développement limité à l'ordre n du produit $f(x)g(x)$ en effectuant le produit des développement limité de $f(x)$ et $g(x)$ à l'ordre n, et en ne conservant dans la partie principale que les termes de degré inférieur ou égal à n.

Méthode :

Trouver le développement limité de $f(x) = e^x\sqrt{1+x}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.

On a

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x),$$

et

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x) \quad (19.9).$$

Par conséquent,

$$f(x) = \left[1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)\right] \cdot \left[1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x)\right].$$

En développant et en remarquant que tous les termes de la forme x^n avec $n = 3, 4, \ldots$, sont des $x^2\varepsilon(x)$, ainsi que tous les termes de la forme $x^n\varepsilon(x)$ avec $n = 2, 3, \ldots$, il vient

$$f(x) = 1 + \left(1 + \frac{1}{2}\right)x + \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)x^2 + x^2\varepsilon(x),$$

$$f(x) = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

Exercice 5

Trouver le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0, de la fonction :

$$f(x) = \ln(1+x)e^x.$$

Intégration des développements limités

Proposition 1

Soit f une fonction indéfiniment dérivable sur un intervalle contenant 0, et soit F une primitive de f. Soit

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x),$$

avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$, le développement limité à l'ordre n de f en 0. Alors

$$F(x) = F(0) + a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \cdots + \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} + x^{n+1}\varepsilon(x),$$

avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Autrement dit, le développement limité à l'ordre $n+1$ de F s'obtient en intégrant terme à terme le développement limité à l'ordre n de f.

Démonstration :
Utilisons la formule de Taylor-Young :

$$\begin{aligned} F(x) &= F(0) + F'(0)x + \frac{F''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{F^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1} + x^{n+1}\varepsilon(x), \\ &= F(0) + f(0)x + \frac{f'(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1} + x^{n+1}\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Or $(k+1)! = (k+1) \times k!$ pour tout entier naturel k, donc

$$F(x) = F(0) + f(0)x + f'(0)\frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{n+1} + x^{n+1}\varepsilon(x),$$

$$F(x) = F(0) + a_0 x + a_1\frac{x^2}{2} + \cdots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1} + x^{n+1}\varepsilon(x), \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Méthode :

Retrouver le développement limité de $\ln(1+x)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.

Partant du développement limité à l'ordre 2 de $\frac{1}{1-x}$, on a successivement par substitution et intégration :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^2\varepsilon(x) \\ \Longrightarrow\ & \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + x^2\varepsilon(x), \\ \Longrightarrow\ & \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0, \end{aligned}$$

car $\ln 1 = 0$ (attention au $F(0)$).

Exercice 6

Trouver le développement limité de $f(x) = \arctan x$ au voisinage de 0 à un ordre arbitraire.

Correction exercice 6

Pour cela, on observe que $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Donc le développement limité à l'ordre $2n$ de f' s'obtient facilement par substitution de $-x^2$ à x dans le développement limité à l'ordre n de $\frac{1}{1-x}$:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 + (-x^2) + (-x^2)^2 + \cdots + (-x^2)^n + x^{2n}\varepsilon(x).$$

Par intégration terme à terme, il vient, puisque $\arctan 0 = 0$,

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+1}\varepsilon(x).$$

Substitutions non élémentaires

Nous admettons le résultat suivant :

Proposition 2

On suppose que $h(x)$ et $g(x)$ admettent des développements limités à l'ordre n au voisinage de 0, et que $g(0) = 0$. Alors la composée $f(x) = h[g(x)]$ admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0. Celui-ci s'obtient en remplaçant x par la partie principale du développement limité de $g(x)$ dans le développement limité de $h(x)$, et en ne conservant dans le calcul que les termes de degré inférieur ou égal à n.

Méthode :

Trouver le développement limité à l'ordre 3 de

$$f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$$

au voisinage de 0.

On sait que $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^3\varepsilon(x)$. Remplaçons x par $g(x) = -x - x^2$. $g(x)$ vérifie bien $g(0) = 0$. On obtient

$$\frac{1}{1+x+x^2} = 1 + (-x-x^2) + (-x-x^2)^2 + (-x-x^2)^3 + x^3\varepsilon(x).$$

Lorsqu'on développe, les termes de degré strictement plus grand que 3 entrent dans le $x^3\varepsilon(x)$, et il vient

$$\frac{1}{1+x+x^2} = 1 - x - x^2 + x^2 + 2x^3 - x^3 + x^3\varepsilon(x),$$
$$\frac{1}{1+x+x^2} = 1 - x - x^2 + x^3\varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

Exercice 7

Trouver le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0, de la fonction :

$$f(x) = \sin(x + x^2).$$

0.4 Généralisations

Développement limité au voisinage de a

On obtient le développement limité d'une fonction $f(x)$ au voisinage d'un réel a en posant $x = a + X$ et en utilisant les développements limités au voisinage de 0.

Méthode :

Trouver le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de $a = 1$, de $f(x) = \sqrt{3+x}$.

Posons $x = 1+X$. Alors X tend vers 0 lorsque x tend vers 1. On a $f(x) = \sqrt{4+X}$, d'où

$$f(x) = 2\sqrt{1+\frac{X}{4}} = 2\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{X}{4}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{X}{4}\right)^2+X^2\varepsilon(X)\right],$$

avec $\lim_{X\to 0}\varepsilon(X) = 0$. Puisque $X = x-1$, il vient

$$f(x) = 2+\frac{1}{4}(x-1)-\frac{1}{64}(x-1)^2+(x-1)^2\varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{x\to 1}\varepsilon(x) = 0.$$

Attention :
On notera qu'on conserve les puissances successives de $x-a$ dans un développement limité au voisinage de a, et qu'on ne développe surtout pas.

En posant $x = a+X$ dans la formule de Taylor-Young, on obtient la formule de Taylor-Young au voisinage de a :

Theorème 2 : formule de Taylor-Young

Soit f une fonction indéfiniment dérivable sur un intervalle contenant a. La formule de Taylor-Young à l'ordre n au voisinage de a s'écrit

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+(x-a)^n\varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x\to a}\varepsilon(x) = 0$.

A l'ordre 2, au voisinage de x_0, on obtient :

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+(x-x_0)^2\varepsilon(x),$$

Puisque le point d'abscisse x_0 est un maximum ou un minimum, on a $f'(x_0) = 0$, et au voisinage de x_0 on a donc

$$f(x) \approx f(x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2.$$

Cette approximation s'utilise en Physique dans l'étude des petites oscillations autour d'une position d'équilibre stable.

On notera que $f''(x_0) > 0$ correspond à un minimum de la fonction [car dans ce cas $f(x) > f(x_0)$ au voisinage de x_0], tandis que $f''(x_0) < 0$ correspond à un maximum de la fonction (car $f(x) < f(x_0)$ au voisinage de x_0).

Développements asymptotiques

En posant $X = \frac{1}{x}$ lorsque $x \to \pm\infty$, on obtient un développement asymptotique de $f(x)$, c'est-à-dire une formule d'approximation au voisinage de l'infini.

Méthode :

Trouver le développement asymptotique à l'ordre 2, au voisinage de $+\infty$, de $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$.
Posons $X = \frac{1}{x}$. Quand $x \to +\infty$, $X \to 0^+$, et on a

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{X^2} + \frac{4}{X} + 5} = \frac{\sqrt{1 + 4X + 5X^2}}{X} = \frac{1}{X}\sqrt{1 + 4X + 5X^2}.$$

Utilisons le développement limité à l'ordre 2 de $\sqrt{1+u}$ au voisinage de 0, obtenu précédemment (Formule 19.9), avec $u = 4X + 5X^2$. On obtient

$$f(x) = \frac{1}{X}\left[1 + \frac{1}{2}(4X + 5X^2) - \frac{1}{8}(4X + 5X^2)^2 + X^2\varepsilon(X)\right],$$

$$f(x) = \frac{1}{X}\left[1 + 2X + \frac{1}{2}X^2 + X^2\varepsilon(X)\right] = \frac{1}{X} + 2 + \frac{1}{2}X + X\varepsilon(X).$$

On revient maintenant à la variable x, en remarquant que $\varepsilon(X)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. On obtient finalement

$$f(x) = x + 2 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{x}\varepsilon(x), \quad \text{avec} \lim_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0.$$

Ce développement asymptotique montre que

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x + 2)] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{1}{2x} + \frac{1}{x}\varepsilon(x)\right] = 0.$$

Ainsi, la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique à la courbe quand $x \to +\infty$. En outre, le reste du développement asymptotique est négligeable, au voisinage de $+\infty$, devant le dernier terme. Quand x tend vers $+\infty$, on a donc $f(x) - (x+2) \approx \frac{1}{2x}$. Lorsque $x \to +\infty$, $\frac{1}{2x} > 0$, ce qui signifie que la courbe représentative de f est *au-dessus* de l'asymptote (Figure 19.2) lorsque x est "suffisamment grand".

1 Notions de fonctions équivalentes

1.1 Définitions

f et g sont *équivalents en* a si et seulement si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

On écrit $f(x) \sim g(x)$ lorsque $x \to a$.

1.2 Premières propriétés

- L'équivalent d'un produit est le produit des équivalents.
- L'équivalent d'un quotient est le quotient des équivalents.

Attention : Il est *faux* d'écrire que l'équivalent d'une somme est la somme des équivalents.

1.3 Équivalents des fonctions polynômes en 0 et à l'infini

Soit P_1 une fonction polynôme :

$$P_1(x) = x\left(1 + \frac{x^2 - 4x^2}{x}\right).$$

On a donc

$$P_1(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} x.$$

$$P_1(x) = -4x^2\left(\frac{x}{-4x^2+1}\right).$$

On a donc

$$P_1(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -4x^2.$$

Soit P_2 une fonction polynôme :

$$P_2(x) = -3x^3 + x^2 + 3 + x + x^2 - 4x^2.$$

$$P_2(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} -3x^3, \quad \text{et} \quad P_2(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -4x^2.$$

On retient :

- Une fonction est équivalente en 0 au terme de plus petit degré.
- Une fonction est équivalente à l'infini au terme de plus haut degré.

Attention : Il est incorrect en mathématiques d'écrire qu'une fonction est équivalente à 0 !!!

1.4 Applications aux fonctions de transfert en physique

On définira dans le cours d'électronique une fonction de transfert qui sera le quotient de fonctions polynômes. On cherchera l'équivalent de la fonction de transfert en 0 et à l'infini. On utilisera donc la propriété que l'équivalent d'un quotient est le quotient des équivalents.

$$H(j\omega) = \frac{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}.$$

- Si $\omega \to 0$, alors

$$H(j\omega) \underset{\omega \to 0}{\longrightarrow} 1.$$

- Si $\omega \to +\infty$, alors

$$H(j\omega) \underset{\omega \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{-j\frac{\omega}{Q}}{-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \frac{-j\omega_0}{Q\omega}.$$