TD : Formule de Moivre et applications

Ce TD traite de la formule de Moivre dans $\mathbb{C}$. A la fin de ce TD, vous devez savoir :

— Déterminer les expressions de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$

1.1 Racine carrée d'un complexe

Proposition 1: Formule de Moivre

Pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a $e^{i\theta n} = e^{in\theta}$ ou encore, par définition de $e^{i\theta}$:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

Démonstration :
Nous avec vu, dans le cours, que $e^{i\theta+\phi} = e^{i\theta}e^{i\phi}$. Cela implique que si $\theta = \phi$, $e^{i2\theta} = e^{i\theta}e^{i\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^2$. On montre facilement, par récurrence, que $e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n$ et donc que $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$.

Méthode :

La formule de Moivre nous permet de trouver facilement la valeur de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$. Nous allons illustrer la méthode avec un exemple : On cherche à trouver $\cos(5\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$. Pour cela, nous utiliserons deux propriétés :

— $\cos(5\theta) = \mathrm{Re}(e^{i5\theta})$

— $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^5 = \cos(5\theta) + i\sin(5\theta)$ (formule de Moivre)

La formule du binôme de Newton nous donne :

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^5 &= \cos^5\theta + 5i\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta \\ &\quad - 10i\cos^2\theta\sin^3\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta + i\sin^5\theta\end{aligned}$$

En identifiant les parties réelles, on obtient

$$\cos 5\theta = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta$$

En remplaçant $\sin^2\theta$ par $1 - \cos^2\theta$ dans l'expression de $\cos 5\theta$, on obtient

$$\begin{aligned}\cos 5\theta &= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta(1 - \cos^2\theta) + 5\cos\theta(1 - \cos\theta)^2 \\ \cos 5\theta &= 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta\end{aligned}$$

Exercice 1 :

Déterminer $\sin(5\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$

Exercice 2 :

En utilisant la formule de Moivre, montrer que

$$\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) \text{ et } \sin(3\theta) = 3\sin(\theta) - 4\sin^3(\theta)$$

Exercice 3 :

Calculer :

$$\frac{\sin(6\theta)}{\sin(\theta)}$$

Exercice 4 :

Soit θ un réel appartenant à $]0, 2\pi[$, simplifier la somme :

$$S = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$$

Exercice 5 :

Soit θ un réel appartenant à $]0, 2\pi[$, calculer :

$$S = \sum_{k=0}^{n} = \binom{n}{k} \cos(k\theta) \text{ et } S' = \sum_{k=0}^{n} = \binom{n}{k} \sin(k\theta)$$