TD : Formule de Moivre et applications

Ce TD traite de la formule de Moivre dans $\mathbb{C}$. A la fin de ce TD, vous devez savoir :

— Déterminer les expressions de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$

1.1 Racine carrée d'un complexe

Proposition 1: Formule de Moivre

Pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ ou encore, par définition de $e^{i\theta}$:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

Démonstration :
Nous avec vu, dans le cours, que $e^{i\theta+\phi} = e^{i\theta}e^{i\phi}$. Cela implique que si $\theta = \phi$, $e^{i2\theta} = e^{i\theta}e^{i\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^2$. On montre facilement, par récurrence, que $e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n$ et donc que $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$.

Méthode :

La formule de Moivre nous permet de trouver facilement la valeur de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$. Nous allons illustrer la méthode avec un exemple : On cherche à trouver $\cos(5\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$. Pour cela, nous utiliserons deux propriétés :

— $\cos(5\theta) = \mathrm{Re}(e^{i5\theta})$

— $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^5 = \cos(5\theta) + i\sin(5\theta)$ (formule de Moivre)

La formule du binôme de Newton nous donne :

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^5 &= \cos^5\theta + 5i\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta \\ &\quad - 10i\cos^2\theta\sin^3\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta + i\sin^5\theta\end{aligned}$$

En identifiant les parties réelles, on obtient

$$\cos 5\theta = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta$$

En remplaçant $\sin^2\theta$ par $1-\cos^2\theta$ dans l'expression de $\cos 5\theta$, on obtient

$$\begin{aligned}\cos 5\theta &= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta(1-\cos^2\theta) + 5\cos\theta(1-\cos\theta)^2 \\ \cos 5\theta &= 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta\end{aligned}$$

Exercice 1 :

Déterminer $\sin(5\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$

Solution: On cherche à déterminer $\sin(5\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$. Pour cela, nous utilisons deux propriétés :

— $\sin(5\theta) = \mathrm{Im}(e^{i5\theta})$

— $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^5 = \cos(5\theta) + i\sin(5\theta)$ (formule de Moivre)

La formule du binôme de Newton nous donne :

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^5 &= \cos^5\theta + 5i\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta \\ &\quad - 10i\cos^2\theta\sin^3\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta + i\sin^5\theta\end{aligned}$$

En identifiant les parties imaginaires, on obtient :

$$\sin(5\theta) = 5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta$$

Ensuite, nous remplaçons $\cos^2\theta$ par $1-\sin^2\theta$ dans l'expression de $\sin(5\theta)$:

$$\begin{aligned}\sin(5\theta) &= 5(1-\sin^2\theta)^2\sin\theta - 10(1-\sin^2\theta)\sin^3\theta + \sin^5\theta \\ &= 5(1-2\sin^2\theta+\sin^4\theta)\sin\theta - 10(1-\sin^2\theta)\sin^3\theta + \sin^5\theta \\ &= 5\sin\theta - 10\sin^3\theta + 5\sin^5\theta - 10\sin^3\theta + 10\sin^5\theta + \sin^5\theta \\ &= 5\sin\theta - 20\sin^3\theta + 16\sin^5\theta\end{aligned}$$

Ainsi, l'expression finale est :

$$\boxed{\sin(5\theta) = 5\sin\theta - 20\sin^3\theta + 16\sin^5\theta.}$$

Exercice 2 :

En utilisant la formule de Moivre, montrer que

$$\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) \text{ et } \sin(3\theta) = 3\sin(\theta) - 4\sin^3(\theta)$$

Solution: Nous allons utiliser la formule de Moivre pour montrer que

$$\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) \quad \text{et} \quad \sin(3\theta) = 3\sin(\theta) - 4\sin^3(\theta).$$

Commençons par la formule de Moivre :

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^3 = \cos(3\theta) + i\sin(3\theta).$$

En développant $(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^3$ à l'aide de la formule du binôme, nous obtenons :

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^3 = \cos^3(\theta) + 3i\cos^2(\theta)\sin(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta) - i\sin^3(\theta).$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, nous avons :

$$\cos(3\theta) = \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta),$$
$$\sin(3\theta) = 3\cos^2(\theta)\sin(\theta) - \sin^3(\theta).$$

Remplaçons maintenant $\sin^2(\theta)$ par $1-\cos^2(\theta)$ dans l'expression de $\cos(3\theta)$:

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) &= \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)(1-\cos^2(\theta))\\ &= \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) + 3\cos^3(\theta)\\ &= 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta).\end{aligned}$$

Ensuite, remplaçons $\cos^2(\theta)$ par $1-\sin^2(\theta)$ dans l'expression de $\sin(3\theta)$:

$$\begin{aligned}\sin(3\theta) &= 3(1-\sin^2(\theta))\sin(\theta) - \sin^3(\theta)\\ &= 3\sin(\theta) - 3\sin^3(\theta) - \sin^3(\theta)\\ &= 3\sin(\theta) - 4\sin^3(\theta).\end{aligned}$$

Ainsi, nous avons montré que :

$$\boxed{\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin(3\theta) = 3\sin(\theta) - 4\sin^3(\theta).}$$

Exercice 3 :

Calculer :

$$\frac{\sin(6\theta)}{\sin(\theta)}$$

Solution: Pour calculer l'expression

$$\frac{\sin(6\theta)}{\sin(\theta)},$$

nous allons utiliser l'expression de $\sin(6\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$ et $\cos(\theta)$, que nous pouvons obtenir à partir de la formule de Moivre.
En utilisant la formule de Moivre, nous avons :

$$\sin(6\theta) = 6\sin(\theta)\cos^5(\theta) - 20\sin^3(\theta)\cos^3(\theta) + 15\sin^5(\theta)\cos(\theta).$$

Nous allons diviser cette expression par $\sin(\theta)$ (supposons que $\sin(\theta) \neq 0$) :

$$\frac{\sin(6\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{6\sin(\theta)\cos^5(\theta) - 20\sin^3(\theta)\cos^3(\theta) + 15\sin^5(\theta)\cos(\theta)}{\sin(\theta)}.$$

En simplifiant chaque terme, on obtient :

$$\frac{\sin(6\theta)}{\sin(\theta)} = 6\cos^5(\theta) - 20\sin^2(\theta)\cos^3(\theta) + 15\sin^4(\theta)\cos(\theta).$$

Ainsi, l'expression finale est :

$$\boxed{\frac{\sin(6\theta)}{\sin(\theta)} = 6\cos^5(\theta) - 20\sin^2(\theta)\cos^3(\theta) + 15\sin^4(\theta)\cos(\theta).}$$

Exercice 4 :

Soit θ un réel appartenant à $]0, 2\pi[$, simplifier la somme :

$$S = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$$

Solution: Soit θ un réel appartenant à $]0, 2\pi[$, nous cherchons à simplifier la somme suivante :

$$S = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta).$$

Nous utilisons l'identité d'Euler pour exprimer $\cos(k\theta)$ en fonction de l'exponentielle complexe :

$$\cos(k\theta) = \mathrm{Re}(e^{ik\theta}).$$

Ainsi, la somme devient :

$$S = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}\right).$$

Nous savons que la somme des $n+1$ premiers termes d'une progression géométrique est donnée par :

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}.$$

Nous allons maintenant simplifier cette expression en utilisant une factorisation via les exponentielles. Remarquons que :

$$\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{(n+1)\theta}{2}} - e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right)}.$$

Nous reconnaissons ici la forme des sinus, en utilisant l'identité suivante :

$$e^{ix} - e^{-ix} = 2i\sin(x).$$

Ainsi, nous pouvons réécrire l'expression comme suit :

$$\begin{aligned}\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}} &= \frac{e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}\left(-2i\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}\\ &= e^{i\frac{n\theta}{2}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.\end{aligned}$$

La partie réelle de cette expression est donnée par :

$$S = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\frac{n\theta}{2}}\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right).$$

En prenant la partie réelle de cette expression, nous obtenons :

$$S = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

Ainsi, la somme S peut être simplifiée comme suit :

$$\boxed{S = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}}.$$

Exercice 5 :

Soit θ un réel appartenant à $]0, 2\pi[$, calculer :

$$S = \sum_{k=0}^{n} = \binom{n}{k} \cos(k\theta) \text{ et } S' = \sum_{k=0}^{n} = \binom{n}{k} \sin(k\theta)$$

Solution: Soit θ un réel appartenant à $]0, 2\pi[$. Nous cherchons à calculer les deux sommes suivantes :

$$S = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta) \quad \text{et} \quad S' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta).$$

Nous considérons la somme complexe suivante :

$$S + iS' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\cos(k\theta) + i\sin(k\theta)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ik\theta}.$$

Il s'agit de la somme des termes d'une suite géométrique binomiale de la forme $e^{ik\theta}$. Nous pouvons appliquer la formule du binôme pour obtenir :

$$S + iS' = \left(1 + e^{i\theta}\right)^n.$$

Pour simplifier l'expression, nous pouvons utiliser une astuce géométrique importante :

$$1 + e^{i\theta} = 2e^{i\frac{\theta}{2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Ainsi, nous avons :

$$\begin{aligned} S + iS' &= \left(2e^{i\frac{\theta}{2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^n \\ &= 2^n e^{i\frac{n\theta}{2}} \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right). \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant séparer les parties réelle et imaginaire de cette expression :

$$\begin{aligned} S &= \mathrm{Re}\left(2^n e^{i\frac{n\theta}{2}} \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right), \\ S' &= \mathrm{Im}\left(2^n e^{i\frac{n\theta}{2}} \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right). \end{aligned}$$

Les expressions finales pour S et S' sont donc :

$$\boxed{S = 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)}$$

$$\boxed{S' = 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}.$$