Complexes : forme algébrique et conjugués

Exercice 1 :

Donner la partie réelle, la partie imaginaire et le conjugué des nombres complexes suivants :

$$\begin{aligned} z_1 &= -2i + 5 \\ z_2 &= 15 \\ z_3 &= 3i \\ z_4 &= i(2+3i) \end{aligned}$$

Solution: Pour les différents nombres complexes donnés :

$$\begin{array}{lll} \mathrm{Re}(z_1) = 5, & \mathrm{Im}(z_1) = -2, & \overline{z_1} = 5 + 2i. \\ \mathrm{Re}(z_2) = 15, & \mathrm{Im}(z_2) = 0, & \overline{z_2} = 15. \\ \mathrm{Re}(z_3) = 0, & \mathrm{Im}(z_3) = 3, & \overline{z_3} = -3i. \end{array}$$

En effectuant le produit, on trouve :

$$z_4 = 2i - 3, \qquad \mathrm{Re}(z_4) = -3, \qquad \mathrm{Im}(z_4) = 2, \qquad \overline{z_4} = -3 - 2i.$$

Exercice 2 :

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1. $z_1 = (2+5i) + (i+3)$
2. $z_2 = 4(-2+3i) + 3(-5-8i)$
3. $z_3 = (2-i)(3+8i)$
4. $z_4 = (1-i)\overline{(1+i)}$
5. $z_5 = i(1-3i)^2$
6. $z_6 = (1+i)^3$

Solution: On regroupe simplement les parties réelles et les parties imaginaires. On trouve

$$z_1 = 5 + 6i.$$

De la même façon,

$$z_2 = (-8 + 12i) + (-15 - 24i) = -23 - 12i.$$

On développe, puis on regroupe pour trouver :

$$z_3 = 6 + 16i - 3i + 8 = 14 + 13i.$$

On écrit

$$z_4 = (1 - i)(1 - i) = 1 - 2i - 1 = -2i.$$

On commence par calculer $(1 - 3i)^2$:

$$(1 - 3i)^2 = 1 - 2 \times 1 \times 3i + (3i)^2 = 1 - 6i - 9 = -8 - 6i.$$

On multiplie ensuite par i :

$$i(1 - 3i)^2 = -8i - 6i^2 = 6 - 8i.$$

Le plus simple est de tout développer, en utilisant la formule du binôme de Newton ou, pour ceux qui ne la connaissent pas (encore), en écrivant $(1+i)^3 = (1+i)^2(1+i)$. On trouve

$$\begin{aligned} z_6 &= (1 + i)^3 \\ &= (1 + i)^2(1 + i) \\ &= (1 + 2i + i^2)(1 + i) \\ &= (1 + 2i - 1)(1 + i) \\ &= 2i(1 + i) \\ &= 2i + 2i^2 \\ &= -2 + 2i. \end{aligned}$$

Avec la formule du binôme, on écrit simplement

$$z_6 = (1 + i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = 1 + 3i - 3 - i = -2 + 2i.$$

Exercice 3 :

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1. $z_1 = \frac{1}{1+i}$
2. $z_2 = \frac{-4}{1+i\sqrt{3}}$
3. $z_3 = \frac{1-2i}{3+i}$
4. $z_4 = \frac{(3+5i)^2}{1-2i}$
5. $z_5 = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i}$

Solution:

1. $z_1 = \frac{1}{1+i}$

   Multiplions le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $1+i$:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} \\ &= \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} \\ &= \frac{1-i}{1^2 - i^2} \\ &= \frac{1-i}{1+1} = \frac{1-i}{2} \end{aligned}$$

$$z_1 = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$$

2. $z_2 = \frac{-4}{1+i\sqrt{3}}$

   Multiplions par le conjugué de $1+i\sqrt{3}$:

$$\begin{aligned}
z_2 &= \frac{-4}{1+i\sqrt{3}} \times \frac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} \\
&= \frac{-4(1-i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})} \\
&= \frac{-4(1-i\sqrt{3})}{1^2-(i\sqrt{3})^2} \\
&= \frac{-4(1-i\sqrt{3})}{1+3} \\
&= -1+i\sqrt{3}
\end{aligned}$$

3. $z_3 = \frac{1-2i}{3+i}$
   Multiplions par le conjugué de $3+i$:

$$\begin{aligned}
z_3 &= \frac{1-2i}{3+i} \times \frac{3-i}{3-i} \\
&= \frac{(1-2i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} \\
&= \frac{(3-i-6i+2i^2)}{9+1} \\
&= \frac{3-7i-2}{10} \\
&= \frac{1-7i}{10} \\
&= \frac{1}{10} - \frac{7i}{10}
\end{aligned}$$

4. $z_4 = \frac{(3+5i)^2}{1-2i}$
   Calculons d'abord $(3+5i)^2$:

$$(3+5i)^2 = 9+30i+25i^2 = 9+30i-25 = -16+30i$$

   Ensuite, multiplions par le conjugué de $1-2i$:

$$\begin{aligned}
z_4 &= \frac{-16+30i}{1-2i} \times \frac{1+2i}{1+2i} \\
&= \frac{(-16+30i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} \\
&= \frac{-16-32i+30i+60i^2}{1^2-(-2i)^2} \\
&= \frac{-16-2i-60}{1+4} \\
&= \frac{-76-2i}{5} \\
&= -\frac{76}{5} - \frac{2i}{5}
\end{aligned}$$

5. $z_5 = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i}$

   Commençons par calculer $\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2$:

$$\begin{aligned}
\frac{1+i}{2-i} \times \frac{2+i}{2+i} &= \frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} \\
&= \frac{2+i+2i+i^2}{4+1} \\
&= \frac{2+3i-1}{5} = \frac{1+3i}{5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 &= \left(\frac{1+3i}{5}\right)^2 \\
&= \frac{(1+3i)^2}{25} \\
&= \frac{1+6i+9i^2}{25} \\
&= \frac{1+6i-9}{25} \\
&= \frac{-8+6i}{25}
\end{aligned}$$

Ensuite, calculons $\frac{3+6i}{3-4i}$ en multipliant par le conjugué de $3-4i$:

$$\begin{aligned}
\frac{3+6i}{3-4i} \times \frac{3+4i}{3+4i} &= \frac{(3+6i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} \\
&= \frac{9+12i+18i+24i^2}{9+16} \\
&= \frac{9+30i-24}{25} = \frac{-15+30i}{25} \\
&= -\frac{3}{5} + \frac{6i}{5}
\end{aligned}$$

Finalement, additionnons les deux résultats :

$$\begin{aligned}
z_5 &= \left(\frac{-8+6i}{25}\right) + \left(-\frac{3}{5} + \frac{6i}{5}\right) \\
&= \frac{-8+6i}{25} + \frac{-15+30i}{25} = \frac{-8-15+(6+30)i}{25} \\
&= \frac{-23+36i}{25}
\end{aligned}$$

Exercice 4 :

Proposition 1: Formule du binôme de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

où :

- $\binom{n}{k}$ est le coefficient binomial, donné par $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$,
- a et b sont deux termes quelconques,
- n est un entier naturel ($n \in \mathbb{N}$),
- k est un entier variant de 0 à n.

Simplifier les nombres complexes suivants : $(1+i)^5$, $(1-i)^4$.

Solution: On développe par la formule du binôme de Newton, en utilisant $i^2 = -1$ pour simplifier et regrouper la partie réelle et la partie imaginaire. Il vient

$$\begin{aligned}(1+i)^5 &= 1 + 5i - 10 - 10i + 5 + i \\ &= -4 - 4i.\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}(1-i)^4 &= 1 - 4i - 6 + 4i + 1 \\ &= -4.\end{aligned}$$

On aurait aussi pu obtenir ces résultats en mettant les nombres complexes sous forme trigonométrique.

Exercice 5 :

Soit z un nombre complexe non nul, de forme algébrique $z = x + iy$. Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = \frac{\overline{z}}{z}$
2. $z_2 = \frac{iz}{\overline{z}}$.

Solution: Soit z un nombre complexe non nul de forme algébrique $z = x + iy$, où x et y sont réels. Trouvons la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = \frac{\overline{z}}{z}$
   Le conjugué de z est $\overline{z} = x - iy$. Ainsi :

   $$z_1 = \frac{x - iy}{x + iy}$$

   Multiplions le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur $x - iy$:

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{(x-iy)(x-iy)}{(x+iy)(x-iy)} \\
&= \frac{x^2-2ixy+(-i)^2y^2}{x^2-i^2y^2} \\
&= \frac{x^2-2ixy-y^2}{x^2+y^2}
\end{aligned}$$

La forme algébrique de z_1 est donc :

$$z_1 = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - i\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

2. $z_2 = \frac{iz}{\overline{z}}$
   Nous avons $z = x + iy$ et $\overline{z} = x - iy$. Ainsi :

$$z_2 = \frac{i(x+iy)}{x-iy}$$

Calculons le numérateur :

$$\begin{aligned}
i(x+iy) &= ix + i^2y \\
&= ix - y
\end{aligned}$$

Donc :

$$z_2 = \frac{ix-y}{x-iy}$$

Multiplions par le conjugué du dénominateur :

$$\begin{aligned}
z_2 &= \frac{(ix-y)(x+iy)}{(x-iy)(x+iy)} \\
&= \frac{ix^2+i^2xy-yx-iy^2}{x^2+y^2} \\
&= \frac{ix^2-xy-yx-iy^2}{x^2+y^2}
\end{aligned}$$

Simplifions :

$$z_2 = \frac{-2xy}{x^2+y^2} + i\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

La forme algébrique de z_2 est donc :

$$z_2 = -\frac{2xy}{x^2+y^2} + i\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

Exercice 6 :

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

1. $z + 2i = iz - 1$
2. $(3+2i)(z-1) = i$
3. $(2-i)z + 1 = (3+2i)z - i$
4. $(4-2i)z^2 = (1+5i)z$

On écrira les solutions sous forme algébrique.

Solution:

1. $z + 2i = iz - 1$

$$\begin{aligned}
z + 2i &= iz - 1 \\
z - iz &= -1 - 2i \\
z(1-i) &= -1 - 2i \\
z &= \frac{-1-2i}{1-i} \\
z &= \frac{(-1-2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} \\
z &= \frac{-1-i+2+2i}{1^2+(-i)^2} \\
z &= \frac{1+i}{2} \\
z &= \frac{1}{2} + \frac{i}{2}
\end{aligned}$$

2. $(3+2i)(z-1) = i$

$$\begin{aligned}
(3+2i)(z-1) &= i \\
z - 1 &= \frac{i}{3+2i} \\
z - 1 &= \frac{i(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} \\
z - 1 &= \frac{3i+2}{9+4} \\
z - 1 &= \frac{2+3i}{13} \\
z &= 1 + \frac{2}{13} + \frac{3i}{13} \\
z &= \frac{15}{13} + \frac{3i}{13}
\end{aligned}$$

3. $(2-i)z + 1 = (3+2i)z - i$

$$\begin{aligned}
(2-i)z+1 &= (3+2i)z-i \\
(2-i)z-(3+2i)z &= -1-i \\
z[(2-i)-(3+2i)] &= -1-i \\
z(-1-3i) &= -1-i \\
z &= \frac{-1-i}{-1-3i} \\
z &= \frac{(-1-i)(-1+3i)}{(-1-3i)(-1+3i)} \\
z &= \frac{1-3i+i-3}{1^2+(3i)^2} \\
z &= \frac{-2-2i}{10} \\
z &= \frac{-1}{5}-\frac{i}{5}
\end{aligned}$$

4. $(4-2i)z^2 = (1+5i)z$

$$\begin{aligned}
(4-2i)z^2 &= (1+5i)z \\
z[(4-2i)z-(1+5i)] &= 0
\end{aligned}$$

Donc, soit $z=0$, soit $(4-2i)z-(1+5i)=0$

$$\begin{aligned}
(4-2i)z &= 1+5i \\
z &= \frac{1+5i}{4-2i} \\
z &= \frac{(1+5i)(4+2i)}{(4-2i)(4+2i)} \\
z &= \frac{4+2i+20i-10}{16+4} \\
z &= \frac{-6+22i}{20} \\
z &= -\frac{3}{10}+\frac{11i}{10}
\end{aligned}$$

Exercice 7 :

Résoudre les équations suivantes :

1. $2z + i = \overline{z} + 1$
2. $2z + \overline{z} = 2 + 3i$
3. $2z + 2\overline{z} = 2 + 3i$

Solution:

1. $2z + i = \overline{z} + 1$

   On pose $z = x + iy$, où x et y sont les parties réelle et imaginaire de z, et $\overline{z} = x - iy$.

$$\begin{aligned} 2(x + iy) + i &= (x - iy) + 1 \\ 2x + 2iy + i &= x - iy + 1 \\ (2x - x) + (2iy + iy) &= 1 - i + i \\ x + 3iy &= 1 \end{aligned}$$

Égalité des parties réelles et imaginaires :

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ 3y &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

   Solution : $z = 1$

2. $2z + \overline{z} = 2 + 3i$

   On pose encore $z = x + iy$ et $\overline{z} = x - iy$.

$$\begin{aligned} 2(x + iy) + (x - iy) &= 2 + 3i \\ (2x + x) + (2iy - iy) &= 2 + 3i \\ 3x + iy &= 2 + 3i \end{aligned}$$

Égalité des parties réelles et imaginaires :

$$\begin{aligned} 3x &= 2 \\ x &= \frac{2}{3} \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Solution : $z = \frac{2}{3} + 3i$

3. $2z + 2\overline{z} = 2 + 3i$

   On pose $z = x + iy$ et $\overline{z} = x - iy$.

$$\begin{aligned} 2(x+iy) + 2(x-iy) &= 2+3i \\ 2x + 2iy + 2x - 2iy &= 2+3i \\ 4x &= 2+3i \end{aligned}$$

   Ici, il n'y a pas de partie imaginaire dans le membre de gauche, donc cette équation n'a pas de solution, car les parties réelles et imaginaires ne correspondent pas.

   Conclusion : Pas de solution.

Exercice 8 :

Résoudre les systèmes suivants, d'inconnues les nombres complexes z_1 et z_2 :

$$\begin{cases} 2z_1 - z_2 & = i \\ -2z_1 + 3iz_2 & = -17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3iz_1 + iz_2 & = i + 7 \\ iz_1 + 2z_2 & = 11i \end{cases}$$

On donnera les résultats sous forme algébrique.

Solution: Résoudre les systèmes suivants, d'inconnues les nombres complexes z_1 et z_2 :

1.

$$\begin{cases} 2z_1 - z_2 & = i \\ -2z_1 + 3iz_2 & = -17 \end{cases}$$

   On résout ce système en commençant par isoler z_2 dans la première équation.

$$z_2 = 2z_1 - i$$

Substituons z_2 dans la deuxième équation :

$$\begin{aligned} -2z_1 + 3i(2z_1 - i) &= -17 \\ -2z_1 + 6iz_1 - 3i^2 &= -17 \\ -2z_1 + 6iz_1 + 3 &= -17 \\ (-2+6i)z_1 &= -17 - 3 = -20 \\ z_1 &= \frac{-20}{-2+6i} \end{aligned}$$

Multiplions par le conjugué de $-2+6i$:

$$z_1 = \frac{-20(-2-6i)}{(-2+6i)(-2-6i)} = \frac{40+120i}{4+36} = \frac{40+120i}{40} = 1+3i$$

Ainsi, $z_1 = 1 + 3i$.
Substituons cette valeur de z_1 dans l'expression de z_2 :

$$z_2 = 2(1+3i) - i = 2 + 6i - i = 2 + 5i$$

Solution du premier système : $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = 2 + 5i$.

2.

$$\begin{cases} 3iz_1 + iz_2 & = i + 7 \\ iz_1 + 2z_2 & = 11i \end{cases}$$

Commençons par isoler z_2 dans la première équation :

$$\begin{aligned} iz_2 &= i + 7 - 3iz_1 \\ z_2 &= -7i + 3z_1 \end{aligned}$$

Substituons z_2 dans la deuxième équation :

$$\begin{aligned} iz_1 + 2(-7i + 3z_1) &= 11i \\ iz_1 - 14i + 6z_1 &= 11i \\ (i+6)z_1 &= 25i \\ z_1 &= \frac{25i}{i+6} \end{aligned}$$

Multiplions par le conjugué de $i + 6$:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{25i(i-6)}{(i+6)(i-6)} = \frac{-25 - 150i}{1+36} = \frac{-25-150i}{37} \\ z_1 &= \frac{-25}{37} - \frac{150i}{37} \end{aligned}$$

Ainsi, $z_1 = \frac{-25}{37} - \frac{150i}{37}$.
Substituons cette valeur dans l'expression de z_2 :

$$\begin{aligned} z_2 &= -7i + 3\left(\frac{-25}{37} - \frac{150i}{37}\right) \\ z_2 &= -7i + \frac{-75}{37} - \frac{450i}{37} \\ z_2 &= \frac{-75}{37} + \left(\frac{-450}{37} - 7\right)i = \frac{-75}{37} + \frac{-701i}{37} \end{aligned}$$

Solution du deuxième système : $z_1 = \frac{-25}{37} - \frac{150i}{37}$, $z_2 = \frac{-75}{37} - \frac{701i}{37}$.