# Equations des droites

Ce TD traite des équations dans un plan. A la fin de ce TD, vous devez savoir :

— Reconnaitre une équation cartésienne et polaire d'une droite.

— Trouver les vecteurs directeurs et normaux à une droite.

## 1.1 Equation cartesienne d'une droite

**Proposition 1**

— Toute droite $D$ du plan a au moins une équation cartésienne du type :

$$ax + by + c = 0,$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $(a, b) \neq (0, 0)$.

— Deux telles équations représentent deux droites confondues si, et seulement si, elles sont proportionnelles.

— Le vecteur $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $D$.

— Le vecteur $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $D$.

**Méthode** :

Soit une droite $D$ définie par deux points $A(1,2)$ et $B(3,5)$. Nous allons chercher l'équation cartésienne de la droite $D$, ainsi qu'un vecteur normal et un vecteur directeur.
Le vecteur $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est donc un vecteur directeur de la droite $D$. Soit $M$ un point quelconque de la droite, $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont donc des vecteurs colinéaire. Cela implique que

$$\text{Det}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$$

c'est à dire

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 \\ y-2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)3 - (y-2)2 = 3x - 2y + 1 = 0$$

L'équation cartésienne $3x - 2y + 1 = 0$ est donc une équation de la droite $D$.
On peut en déduire le vecteur normal à la droite $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

## 1.2 Equation polaire d'une droite

**Proposition 2**

Soit $c$ un réel non nul. et soient $a$ et $b$ des réels non nul simultanément. Alors, l'équation polaire

$$r = \frac{c}{a\cos\theta + b\sin\theta}$$

est celle d'une droite ne passant pas par l'origine.

**Démonstration :**
On pose $x = r\cos\theta$et $y = r\sin\theta$. En notant l'équation cartesienne d'une droite $ax + by + c' = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} ax + by + c' &= 0 \\ ar\cos\theta + br\sin\theta + c' &= 0 \\ r(a\cos\theta + b\sin\theta) &= -c' \end{aligned}$$

En prenant $-c' = c$, on obtient

$$r = \frac{c}{a\cos\theta + b\sin\theta}$$

**Exercice 1 :**

Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère les deux droites $(D_1) : 3x + 2y - 6 = 0$ et $(D_2) : y = \frac{2}{3}x + 2$.

1. Faire une figure !
2. Déterminer un vecteur normal puis un vecteur directeur de $(D_1)$ et $(D_2)$. En déduire que les deux droites sont perpendiculaires.
3. Déterminer les coordonnées cartésiennes du point d'intersection $I$ de $(D_1)$ et $(D_2)$.
4. Trouver les équations polaires de $(D_1)$ et $(D_2)$.

**Solution:**

1. Astuce, poser $x = 0$ et chercher $y$, puis poser $y = 0$ et chercher $x$.
2. L'équation de $(D_1)$ donne le vecteur normal $\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Un vecteur directeur est donc $\overrightarrow{d_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Pour $(D_2)$ : $2x - 3y + 6 = 0$ donne le vecteur normal $\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Un vecteur directeur est donc $\overrightarrow{d_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Puisque $\overrightarrow{d_1}.\overrightarrow{d_2} = 0$, les deux droite sont perpendiculaires.

3. Les coordonnées $x$ et $y$ de $I$ sont données par

$$\begin{cases} 3x + 2y &= 6 \\ 2x - 3y &= -6 \end{cases}$$

On trouve $x = \frac{6}{13}$ et $y = \frac{30}{13}$.

4. On remplace $x$ par $r\cos\theta$ et $y$ par $r\sin\theta$.
Pour $(D_1)$ : $3r\cos\theta + 2r\sin\theta = 6$ donc $r = \frac{6}{3\cos\theta + 2\sin\theta}$
Pour $(D_2)$ : $2r\cos\theta - 3r\sin\theta = -6$ donc $r = \frac{-6}{2\cos\theta - 3\sin\theta}$

**Exercice 2 :**

Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère la droite $(AB)$ avec $A(1,1)$ et $B(-1,-2)$.

1. Déterminer l'équation cartésienne de $(AB)$
2. Soit $(D)$ la droite d'équation polaire $r = \frac{2}{3\sin\theta + \cos\theta}$.
   (a) Déterminer l'équation cartésienne de $(D)$, en déduire un vecteur directeur et un vecteur normal.
   (b) Représenter les droite $(AB)$ et $(D)$ sur une figure.
   (c) Calculer l'angle formé par les droites $(AB)$ et $(D)$.
3. Déterminer l'équation cartésienne de la droite $(\Delta)$ parallèle à $(AB)$ et passant par $O$.
4. Déterminer l'équation cartésienne de la droite $(D')$ perpendiculaire à $(D)$ et passant par $A$.

**Solution:**

1. Soit $M(x,y)$ un point de la droite $(AB)$, alors

$$\begin{aligned} \text{Det}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) &= 0 \\ &= \begin{vmatrix} x-1 & -2 \\ y-1 & -3 \end{vmatrix} \\ &= 3x - 2y - 1 \end{aligned}$$

2. (a) L'équation polaire de $(D)$ s'écrit $3r\sin\theta + r\cos\theta = 2$. Donc l'équation cartésienne est $x + 3y - 2 = 0$.

(b)

(c) Un vecteur directeur de $(AB)$ est le vecteur $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ lui même. Un vecteur directeur de $(D)$ est $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ (que l'on retrouve grace à son vecteur normal). On a donc $\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{d}}{\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{d}\|} = \frac{3}{\sqrt{13}\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{130}}$

3. On écrit $M(x, y)$ un point de la droite $(\Delta)$, alors

$$\begin{aligned} \text{Det}(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AB}) &= 0 \\ &= \begin{vmatrix} x & -2 \\ y & -3 \end{vmatrix} \\ &= 3x - 2y \end{aligned}$$

4. On écrit $M(x, y)$ un point de la droite $(D')$, alors

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{d} &= 0 \\ &= \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 3x - y - 2 \end{aligned}$$

**Exercice 3 :**

Soit $A$ le point de coordonnées $(2, 1)$ et $(D)$ la droite d'équation cartésienne $x+y-2 = 0$ dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$

1. Calculer les coordonnées du point $H$, projection orthogonale de $A$ sur $(D)$ et de $A'$, symétrique de $A$ par rapport à la droite $(D)$.

**Solution:** Soit $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ un vecteur normal à la droite $(D)$. Le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est donc colinéaire à $\overrightarrow{n}$. On a donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{Det}(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{n}) &= 0\\ &= \begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ y-1 & 1 \end{vmatrix}\\ &= x - y - 1\end{aligned}$$

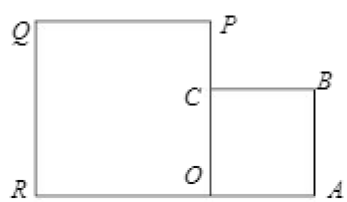
En additionnant $x + y - 2 = 0$ et $x - y - 1 = 0$, on obtient $x = \frac{3}{2}$ et $y = \frac{1}{2}$.

**Exercice 4 :**

Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère les droites $(D)$ et $(D')$ d'équations $y = ax + b$ et $y' = a'x + b$. Démontrer que $(D)$ et $(D')$ sont perpendiculaires si et seulement si $aa' = -1$.

**Solution:** Il suffit de prendre les deux vecteur normaux et de faire leur produit scalaire.

**Exercice 5 :**




On considère la figure ci-dessous, formée de deux carrés $OABC$ et $OPQR$. On construit le point $M$ comme intersection de $(AP)$ et de $(BQ)$. En introduisant un repère convenable, montrer que les points $M$, $C$ et $R$ sont alignés.

**Solution:** Choisissons un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\vec{i} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OC}$ (Figure 7.26). Alors on a $A(1, 0)$, $B(1, 1)$, $C(0, 1)$, $P(0, \alpha)$, $Q(-\alpha, \alpha)$, $R(-\alpha, 0)$, où $\alpha \in \mathbb{R}$. L'équation de $(AP)$ est :

$$\frac{y-0}{x-1} = \frac{\alpha - 0}{0-1} \implies x\alpha - \alpha + y = 0 \implies x\alpha + y - \alpha = 0 \quad (E_1)$$

L'équation de $(BQ)$ est :

$$\frac{y-1}{x-1} = \frac{\alpha-1}{-\alpha-1} \implies x\alpha - x - 2\alpha + y + \alpha = 0$$
$$\implies (x-1)\alpha + (y+1) - 2\alpha = 0 \quad (E_2)$$

L'équation de $(CR)$ est :

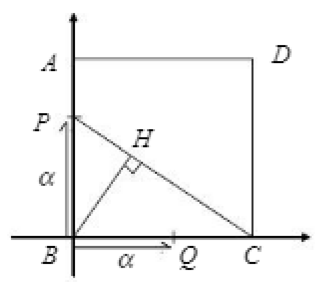
$$\frac{y-1}{x} = \frac{0-1}{-\alpha-0} \implies x - \alpha y + \alpha = 0 \quad (E_3)$$

On remarque que $(E_3) = (E_1) - (E_2)$. Les coordonnées de $M$, qui vérifient $(E_1)$ et $(E_2)$, vérifient donc aussi $(E_3)$. Ainsi, $M = (AP) \cap (BQ) = (CR)$.

**Exercice 6 :**

Soit $(ABCD)$ un carré. On construit $P \in (AB)$ et $Q \in (BC)$ tels que $BP = BQ$. Soit $H$ la projection orthogonale de $B$ sur $(PC)$. Montrer que $(QH)$ et $(HD)$ sont orthogonales.

**Solution:**




On se place dans le repère d'origine $B$ et d'axes $Ox = (BC)$, $Oy = (BA)$. On peut supposer, sans perte de généralité, que le carré a ses côtés de longueur 1 (voir figure). Déterminons les coordonnées $x$ et $y$ de $H$. D'abord, si on note $\alpha = BP$, les vecteurs $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{CP}$ sont colinéaires, donc

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ y & \alpha \end{vmatrix} = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad x + y = \alpha. \tag{1}$$

Par ailleurs, les vecteurs $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{CP}$ sont orthogonaux, donc $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{BH} = 0$, c'est-à-dire $x = \alpha y$. En reportant dans l'équation 1, on obtient $y = \frac{\alpha}{\alpha^2+1}$, d'où $x = \frac{\alpha^2}{\alpha^2+1}$. Les coordonnées de $H$ sont donc $H\left(\frac{\alpha^2}{\alpha^2+1}, \frac{\alpha}{\alpha^2+1}\right)$.
On en déduit :

$$\overrightarrow{QH} = \left(\alpha\left(\frac{\alpha^2}{\alpha^2+1} - 1\right), \frac{\alpha}{\alpha^2+1}\right), \quad \overrightarrow{DH} = \left(\frac{-1}{\alpha^2+1}, \frac{\alpha}{\alpha^2+1} - 1\right).$$

On vérifie alors aisément que $\overrightarrow{QH} \cdot \overrightarrow{DH} = 0$, ce qui prouve que $(QH) \perp (HD)$.