Rappels Mathématiques

Exercice 1 :

Écrire sous la forme d'une fraction irréductible :

1. $A = \frac{4}{3} \times \frac{7}{5}$
2. $B = \frac{2}{5} \times \frac{5}{9}$
3. $C = \frac{7}{8} \times \frac{6}{5}$
4. $D = \frac{-2}{5} \times \frac{3}{-7} \times \frac{-7}{2}$
5. $E = 7 \times \frac{1}{11} \times \frac{3}{14}$
6. $F = \frac{6}{35} \times \frac{14}{3} \times \frac{1}{2}$
7. $G = \frac{51}{26} \times \frac{49}{15} \times \frac{65}{119}$

Exercice 2 :

Écrire sous la forme d'une fraction irréductible :

1. $A = \frac{2}{3} \div \frac{5}{7}$
2. $B = \frac{1}{3} \div 5$
3. $C = -4 \div \frac{-2}{13}$
4. $D = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}}$
5. $E = \frac{\frac{3}{7}}{2}$
6. $F = -\frac{\frac{-12}{49}}{\frac{-3}{-35}}$

Exercice 3 :

Écrire sous la forme d'une fraction, la plus simple possible :

1. $A = \frac{\frac{b^2}{a^5}}{\frac{a^7}{b^3}}$
2. $B = \frac{\frac{a^2}{b^5}}{\frac{a^7}{b^3}}$
3. $C = \frac{\frac{a^3}{b^2} \times \frac{3a^2}{b} \times \frac{b^7}{2a^4}}{1}$

Exercice 4 :

Écrire sous la forme d'une fraction irréductible :

1. $A = \frac{8}{12}$
2. $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$

3. $C = \frac{2}{3} + \frac{5}{6}$
4. $D = \frac{2}{5} - 1$
5. $E = \frac{5}{4} - \frac{7}{6}$
6. $F = \frac{1}{15} + \frac{1}{3} - \frac{3}{20}$

Exercice 5 :

Écrire sous la forme d'une fraction irréductible :

1. $A = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} \times \frac{2}{5}$
2. $B = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2}}$
3. $C = \left(\frac{7}{3}\right)^2 - \frac{11}{4}$
4. $D = \frac{1+\frac{1}{7}}{1+\frac{1}{3}}$
5. $E = \frac{-3}{5} \times \frac{5}{-6} \times \frac{13}{1}$
6. $F = \frac{4}{2+\frac{1}{3}} - \frac{5}{6}$
7. $G = \frac{5}{7} + \left(\frac{\frac{3}{2}}{2}\right)$
8. $H = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}$
9. $I = \frac{\frac{7}{-6} \times \frac{3}{-10} \times \frac{-14}{5}}{\frac{1}{-5}}$

Exercice 6 :

Écrire sous la forme d'une fraction, la plus simple possible :

1. $A = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$
2. $B = \frac{3}{2a} + \frac{5}{b}$
3. $C = \frac{3}{2a} - \frac{1}{ab}$
4. $D = \frac{1}{2a} + \frac{1}{6a} + \frac{1}{15a}$
5. $E = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3}$
6. $F = \frac{2}{ab} + \frac{3}{a^2} + \frac{4}{b^2}$

Exercice 7 :

Calculer sans la calculatrice, en justifiant votre résultat, les puissances suivantes :

$$2^3, \quad 0^{14}, \quad (-2)^3, \quad (-1)^{10}, \quad (-1)^{13}$$

Exercice 8 :

Transformer l'écriture en une seule puissance en utilisant la règle « produit de deux puissances » :

$$3^2 \times 3^8, \quad 4 \times 4^2, \quad (-9)^3 \times (-9)^2 \times (-9)$$

Exercice 9 :

Transformer l'écriture en une seule puissance en utilisant la règle « puissance d'une puissance » :

$$\left((-3)^2\right)^2, \quad \left((-2)^3\right)^2, \quad \left((-5)^3\right)^2, \quad \left((7)^5\right)^2$$

Exercice 10 :

Transformer l'écriture en une seule puissance en utilisant la règle « quotient de deux puissances » :

$$\frac{3^5}{3^2}, \quad \frac{(-5)^4}{(-5)^2}, \quad \frac{(-4)^2}{(-4)^4}$$

Exercice 11 :

Simplifier puis calculer les expressions suivantes :

$$A = \left(7^{-24} \times 7^{-26} \times 7^{51}\right)^2$$

$$B = \left(5^{-4} \times 5^5\right)^3$$

$$C = (2 \times 3)^5 \times 3^{-3} \times 2 \times 2^{-4} \times 3^{-1}$$

$$D = \frac{2^5 \times 3^8}{3^5 \times 2^3}$$

$$E = \frac{5^{12} \times 10^{-3} \times 3^8}{10^{-5} \times 3^8 \times 5^{10}}$$

$$F = 8 \times \left(\frac{7 \times 5}{3}\right)^5 \frac{5^2 \times 7^3}{7^4 \times 5^5} \times \left(7^{-2}\right)^2$$

Exercice 12 :

Simplifier les expressions :

a) $e^{\ln(2)}$
b) $e^{-\ln(3)}$
c) $e^{2\ln(5)}$
d) $e^{\frac{1}{2}\ln(16)}$
e) $\ln(e^3)$
f) $\ln(e^{-4})$
g) $\ln(\sqrt{e})$
h) $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}}\right)$
i) $e^3 e^5$

j) $e^{-5}e^{3}e^{2}$
k) $(e^{-3})^{2}$
l) $\frac{1}{e^{7}}$
m) $\frac{1}{e^{-x+2}}$
n) $e^{-x+3}e^{2x+2}$
p) $\frac{e^{3x+2}}{e^{2x+3}}$
q) $(e^{-2x+3})^{2}$

Exercice 13 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $e^{x}=3$
b) $e^{x}+1=0$
c) $e^{x+3}=1$
d) $\ln(x)=6$
e) $\ln(x)=-2$
f) $\ln(x+2)=5$

Exercice 14 :

Résoudre :

a) $e^{2x+1}=3$
b) $e^{-3x+2}=0$
c) $e^{2x+1}=e^{-x-1}$
d) $\frac{e^{3x-2}}{e^{2x+5}}=1$
e) $e^{x^2+5x-5}=e$
f) $e^{6x-1}=5$
g) $e^{3x}-2>1$
h) $\frac{e^{5x+2}}{e^{-3x+6}}>0$
i) $\frac{e^{5x+2}}{e^{-3x+6}}>6$

Exercice 15 :

Déterminer les limites suivantes, et interpréter graphiquement le résultat, en termes d'asymptote, lorsque cela est possible :

a) $\lim_{x\to+\infty}(e^{2x}+e^{x}+3x)$
b) $\lim_{x\to-\infty}(e^{2x}+e^{x}+5x^{3})$
c) $\lim_{x\to+\infty}(10-e^{-0.1x})$

d) $\lim_{x \to -\infty} (e^{-x^2} + e^x)$
e) $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x+3}$
f) $\lim_{x \to +\infty} (e^x - x)$
g) $\lim_{x \to +\infty} \frac{15}{1-e^{1-x}}$
h) $\lim_{x \to -\infty} \frac{xe^x+3}{e^{-3x}}$

Exercice 16 :

Résoudre les équations suivantes :

a) $3x - 4 = 2x + 9$
b) $5x - 4 = 8 - 3x$
c) $3 - (5 - x) = 3 - 4x$
d) $2(5 - 3x) = 6(2x + 1)$
e) $\frac{x}{15} - \frac{2}{3} = 0$
f) $\frac{5}{4}x = \frac{3}{5} + x$

Exercice 17 :

Trouver les équations qui admettent (-2) pour solution :

a) $2x + 4 = 0$
b) $6x + 2 = -10$
c) $-5x - 4 = -6$

Exercice 18 :

Résoudre les équations suivantes :

a) $(2x + 7)(-5x + 2) = 0$
b) $64x^2 - 81 = 0$
c) $49x^2 - 42x + 9 = 0$

Exercice 19 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $x(x + 1) + (x^2 - 1) = 0$
2) $2x - 1 - 5 = 0$
3) $2(x - 3)(2x - 5) = x - 9$
4) $5x - 7 = 3$
5) $2x + 3 = 1 - 2$

Exercice 20 :

Soient les deux expressions $A(x) = (x - 1)^2 - 4$ et $B(x) = 9x^2 - 6x + 1$

a) Factoriser $A(x)$ et $B(x)$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : $A(x) = 0$ et $B(x) = 0$

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $B(x) = A(x) + 4$

Exercice 21 :

1. On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{x} - \ln x.$$

   (a) Etudier les variations de f et en déduire que f admet un minimum sur $]0\ ;\ +\infty[$.

   (b) En déduire le signe de f puis que, pour tout $x > 1$, $0 < \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{\sqrt{x}}{x}$.

   (c) En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

2. Soit n un entier naturel non nul.
   On considère la fonction f_n définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{n}}}.$$

   En utilisant la question 1., déterminer, si elle existe, la limite en $+\infty$ de la fonction f_n.