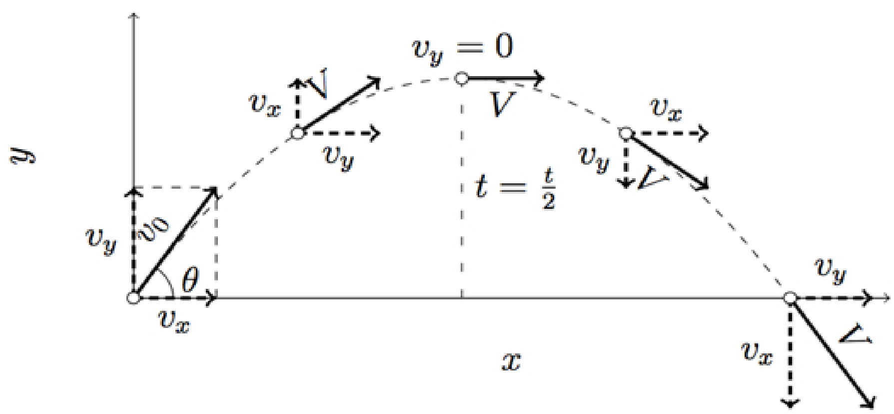
Cours de Physique 1 – I1 - 2024/2025

# Étude du mouvement d'un projectile sous une vitesse initiale $v_0$ et un angle $\theta$ avec l'horizontale




Nous allons étudier le mouvement d'un projectile en tenant compte des hypothèses suivantes :

- La seule force agissant sur le projectile est le **poids** ($\vec{P} = m\vec{g}$),
- Le mouvement s'effectue dans un plan vertical (2D),
- Le projectile est lancé avec une **vitesse initiale** $v_0$ sous un **angle** $\theta$ par rapport à l'horizontale.

## 1. Équations du mouvement

### a) Décomposition de la vitesse initiale

La vitesse initiale $\vec{v_0}$ est décomposée en deux composantes selon les axes $x$ (horizontal) et $y$ (vertical) :

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta, \quad v_{0y} = v_0 \sin\theta.$$

### b) Mouvement selon l'axe horizontal ($x$)

- L'accélération selon l'axe $x$ est nulle ($a_x = 0$), donc la vitesse reste constante :

$$v_x(t) = v_{0x} = v_0 \cos\theta.$$

- La position horizontale $x(t)$ en fonction du temps est donnée par :

$$x(t) = v_{0x} t = v_0 \cos\theta \cdot t.$$

### c) Mouvement selon l'axe vertical ($y$)

- La deuxième loi de Newton:

$$\vec{P} = m\vec{a}$$
$$-mg = ma$$
$$a_y = -g$$

  la vitesse verticale à l'instant $t$ est donnée par :

$$v_y(t) = v_{0y} - gt = v_0 \sin\theta - gt.$$

- La position verticale $y(t)$ en fonction du temps est obtenue par intégration :

$$y(t) = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2.$$

  En substituant $v_{0y}$ :

$$y(t) = v_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2.$$

## 2. Équation de la trajectoire

L'équation de la trajectoire $y = f(x)$ est obtenue en éliminant le temps $t$ des équations $x(t)$ et $y(t)$.

1. À partir de $x(t) = v_0 \cos\theta \cdot t$, isolons $t$ :

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\theta}.$$

2. Substituons $t$ dans $y(t)$ :

$$y = v_0 \sin\theta \cdot \frac{x}{v_0 \cos\theta} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0 \cos\theta}\right)^2.$$

3. Simplifions :

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta}.$$

## 3. Caractéristiques du mouvement

### a) Temps de montée ($t_{montée}$)

Le projectile atteint son altitude maximale lorsque $v_y = 0$ :

$$v_{0y} - gt_{montée} = 0t_{montée} = \frac{v_0 \sin\theta}{g}.$$

### b) Hauteur maximale ($y_{max}$)

La hauteur maximale est obtenue en substituant $t_{montée}$ dans $y(t)$ :

$$y_{max} = v_0 \sin\theta \cdot t_{montée} - \frac{1}{2}gt^2_{montée}.$$

Simplifions :

$$y_{max} = \frac{(v_0 \sin\theta)^2}{2g}.$$

## c) Temps de vol total ($t_{vol}$)

Le projectile revient au sol lorsque $y = 0$. En résolvant $y(t) = 0$ :

$$v_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 = 0.$$

Factorisons $t$ :

$$t \left( v_0 \sin\theta - \frac{1}{2} g t \right) = 0.$$

Deux solutions :

$$t = 0, \quad t = \frac{2 v_0 \sin\theta}{g}.$$

temps total de vol $t_{vol} = \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$

## d) Portée horizontale ($x_{max}$)

La portée est la distance horizontale parcourue lorsque $y = 0$ (temps total de vol $t_{vol}$) :

$$x_{max} = v_{0x} \cdot t_{vol}.$$

Substituons :

$$x_{max} = v_0 \cos\theta \cdot \frac{2 v_0 \sin\theta}{g}.$$

Simplifions :

$$x_{max} = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}.$$