

Devoir Maison 1

Exercice 1 :

Bac Amérique du nord 2002

Pour tout réel k strictement positif, on considère la fonction f_k définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f_k(x) = \ln(e^x + kx) - x.$$

Soit \mathcal{C}_k la courbe représentative de la fonction f_k dans le plan muni d'un repère orthogonal, (unités graphiques : 5 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).

Etude préliminaire : mise en place d'une inégalité.

On considère la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(1 + x) - x.$$

1. Etudier le sens de variation de g .
2. En déduire que pour tout réel a positif ou nul $\ln(1 + a) \leq a$.

Partie A : Etude de la fonction f_1 définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f_1(x) = \ln(e^x + x) - x$.

1. Calculer $f_1'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et en déduire le sens de variation de la fonction f_1 .
2. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$, $f_1(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{e^x}\right)$. En déduire la limite de f_1 en $+\infty$.
3. Dresser le tableau de variation de f_1 .

Partie B : Etude et propriétés des fonctions f_k .

1. Calculer $f_k(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et en déduire le sens de variation de la fonction f_k .
2. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$
 $f_k(x) = \ln\left(1 + k\frac{x}{e^x}\right)$. En déduire la limite de f_k , en $+\infty$.

3. (a) Dresser le tableau de variation de f_k .
(b) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; +\infty[$, on a $f_k(x) \leq \frac{k}{e}$.
4. Déterminer une équation de la tangente T_k à \mathcal{C}_k au point O.
5. Soit p et m deux réels strictement positifs tels que $p < m$.
Etudier la position relative de \mathcal{C}_p et \mathcal{C}_m .
6. Tracer les courbes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 ainsi que leurs tangentes respectives T_1 et T_2 en O.

Partie C : Majoration d'une intégrale.

Soit λ un réel strictement positif, on note $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe \mathcal{C}_k et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \lambda$.

1. Sans calculer $\mathcal{A}(\lambda)$, montrer que $\mathcal{A}(\lambda) \leq k \int_0^\lambda x e^{-x} dx$ (on pourra utiliser le résultat de la question préliminaire).
2. Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale $\int_0^\lambda x e^{-x} dx$.
3. On admet que $\mathcal{A}(\lambda)$ admet une limite en $+\infty$.
Montrer que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\lambda) \leq k$.
Interpréter graphiquement ce résultat