Équations différentielles linéaires du 1er ordre à coefficients constants

Cours de : Guillaume Chivot

Présentation UNILASALLE

Mars 2023

<u>Prérequis</u> :

Les notions à maîtriser avant d’aborder ce cours sont :

- Les dérivées
- Les primitives
- Les exponentielles et les logarithmes

<u>Objectifs du cours</u> :

Les notions maîtrisées à la fin de ce cours seront :

- Savoir reconnaître et définir une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants
- Savoir résoudre complètement une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants

Équations différentielles linéaires du 1er ordre à coefficients constants - Définition :

On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants une équation différentielle de la forme :

$$a.y'(x) + b.y(x) = f(x) \qquad \text{(E)}$$

où a et b sont des constantes ($a \neq 0$), f(x) une fonction connue de x et y(x) est la fonction de x à déterminer.

exemple :

$$5y'(x) + 4y(x) = 4x^2 - 1$$

Dans cet exemple a=5, b=4 et $f(x)=4x^2-1$.

Équations différentielles linéaires du 1er ordre homogène à coefficients constants - Définition :

On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre homogène à coefficients constants une équation différentielle de la forme :

$$a.y'(x) + b.y(x) = 0 \qquad \text{(H)}$$

où a et b sont des constantes ($a \neq 0$), et où y(x) est la fonction de x à déterminer.

exemple :

$$5y'(x) + 4y(x) = 0$$

Dans cet exemple a=5, b=4.

Cette équation est une partie de la solution de l'équation précédente.

Équations différentielles linéaires du 1er ordre homogène à coefficients constants - Résolution :

Théorème 1 :

La solution générale de l’équation (H) est

$$y_h(x) = Ce^{-\frac{b}{a}x}$$

où C est une constante réelle.

Remarque : y(x) = 0 est une solution évidente de l’équation (H). Cette solution n’apportant rien, nous la laisserons de côté.

Équations différentielles linéaires du 1er ordre homogène à coefficients constants - Résolution :

Démonstration :

Pour y(x)≠0 :
et a≠0

$$a.y'(x) + b.y(x) = 0 \iff \frac{y'(x)}{y(x)} = -\frac{b}{a}$$

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}dx = \int -\frac{b}{a}dx$$

$$ln(\|y(x)\|) = -\frac{b}{a}x + C_1$$

Avec C_1 une constante réelle quelconque

$$y(x) = \pm e^{C_1} e^{-\frac{b}{a}x}$$

$$y(x) = Ce^{-\frac{b}{a}x}$$

Équations différentielles linéaires du 1er ordre à coefficients constants - Solution :

Théorème 2 :

la solution générale y(x) de l'équation (E) s'écrit

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

avec :

- $y_h(x)$ la solution de l'équation homogène (H)
- $y_p(x)$ une solution particulière de l'équation (E)

exemple : Une solution particulière de l'équation $y'(x)+4y(x)=8$ est $y_p(x)=2$.

Équations différentielles linéaires du 1er ordre à coefficients constants - :

Démonstration :

Soit y(x) la solution générale de l'équation (E)

$$a.y'(x) + b.y(x) = f(x)$$

Soit $y_p(x)$ la solution particulière de l'équation (E)

$$a.y_p'(x) + b.y_p(x) = f(x)$$

En soustrayant ces équations, on obtient :

$$a.(y'(x) - y_p'(x)) + b.(y(x) - y_p(x)) = 0$$

$y(x)-y_p(x)$ est donc la solution de l'équation (H). Ainsi $y(x)-y_p(x)=y_h(x)$, c'est à dire $y(x)=y_p(x)+y_h(x)$

Équations différentielles linéaires du 1er ordre à coefficients constants - Problème de Cauchy :

Théorème 3 :

On appelle problème de Cauchy le système suivant

$$a.y'(x) + b.y(x) = f(x)$$
$$y(x_0) = y_0$$

Il admet une solution unique sur l'intervalle de définition de x.

Ce théorème est admis.

Remarque : il est généralisable au cas où a et b sont des fonctions de x.

Équations différentielles linéaires du 1er ordre homogène à coefficients constants - Exemple:

On cherche à résoudre le problème de Cauchy suivant

$$y'(x) + 4y(x) = 8$$
$$y(0) = 0$$

Ici, on a les constantes de l'équation (E) égalent à a=1, b=4 et f(x)=8. En utilisant le théorème 1, on sait que la solution homogène s'écrit :

$$y_h(x) = Ce^{-4x}$$

Une solution particulière évidente de cette équation est $y_p(x)=2$. On en déduit, grâce au théorème 2, la solution y(x)

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_p(h) \\ &= Ce^{-4x} + 2 \end{aligned}$$

Équations différentielles linéaires du 1er ordre homogène à coefficients constants - Exemple:

Finalement, grâce aux conditions initiales et au théorème 3 qui nous assure l’unicité de la solution, on peut déduire la valeur de la constante C

$$\begin{aligned} y(0) &= Ce^{-4*0} + 2 \\ &= C + 2 = 0 \\ C &= -2 \end{aligned}$$

On trouve donc la solution générale de l’équation comme

$$y(x) = 2(1 - e^{-4x})$$

Équations différentielles linéaires du 1er ordre à coefficients constants - solutions particulières :

second membre	**solution particulière**
$f(x) = C$ où C est une constante	si b≠0, $y_p(x) = \frac{C}{b}$
	si b=0, $y_p(x) = \frac{C}{a}x$
$f(x) = P(x)$ où P est un polynôme de degré n, avec n∈N*	$y_p(x) = Q(x)$ Où Q(x) est un polynôme tel que :
	si b≠0, alors deg(Q) = n
	si b=0, alors deg(Q) = n+1 et val(Q) = 1

Équations différentielles linéaires du 1er ordre à coefficients constants - solutions particulières :

second membre	**solution particulière**
$f(x) = P(x)e^{sx}$ où P est un polynôme de degré n, n∈N*, et s un réel	$y_p(x) = Q(x)e^{sx}$ Où Q(x) est un polynôme tel que :
	si s≠-b/a, alors deg(Q) = n
	si s=-b/a, alors deg(Q) = n+1 et val(Q) = 1
$f(x) = \alpha \cos(\omega x + \varphi) + \beta \sin(\omega x + \varphi)$ où ω est un réel non-nul	$y_p(x) = A \cos(\omega x + \varphi) + B \sin(\omega x + \varphi)$

Équations différentielles linéaires du 1er ordre à coefficients constants - Exercices :

Résoudre les équations différentielles :

$$y'(x) + 2y(x) = 2x + 1$$

$$y'(t) - 4y(t) = \cos(3t)$$
$$y(0) = 0$$

Équations différentielles linéaires du 1er ordre à coefficients constants - Méthode de variation de la constante **:**

Lorsque le second membre f(x) ne correspond à aucun des seconds membres usuels identifiés précédemment et donc ne permet pas de connaître la forme d'une solution particulière, on utilise la méthode dite de la variation de la constante.

- On suppose que la solution générale de l'équation (E) est

$$y(x) = k(x)e^{-\frac{b}{a}x}$$

où k n'est plus une constante, mais une fonction de x

Équations différentielles linéaires du 1er ordre à coefficients constants - Méthode de variation de la constante **:**

- En remplaçant y(x) dans l'équation (E) par la solution précédente, on obtient

$$a\left(k'(x)e^{-\frac{b}{a}x} - \frac{b}{a}e^{-\frac{b}{a}x}\right) + bk(x)e^{-\frac{b}{a}x} = f(x)$$

$$ak'(x)e^{-\frac{b}{a}x} = f(x)$$

$$k'(x) = \frac{f(x)}{a}e^{\frac{b}{a}x}$$

Il suffit ensuite de prendre la primitive de l'expression précédente pour obtenir la valeur de k(x)

$$\boxed{k(x) = \int \frac{f(x)}{a}e^{\frac{b}{a}x}dx}$$

Équations différentielles linéaires du 1er ordre à coefficients constants - Méthode de variation de la constante - Exemple **:**

Soit l'équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants

$$y'(x) + y(x) = \frac{e^{-x}}{x}$$

Ici, a=1, b=1 et $f(x)=e^{-x}/x$. La fonction f(x) n'appartient à aucune fonction définie dans le tableau des solutions particulières. On va donc appliquer la méthode de variation de la constante pour résoudre l'équation précédente.

$$k'(x) = \frac{f(x)}{a} e^{\frac{b}{a}x} = \frac{e^{-x}}{x} e^{x}$$
$$= \frac{1}{x}$$

Équations différentielles linéaires du 1er ordre à coefficients constants - Méthode de variation de la constante - Exemple :

On détermine k(x) en faisant la primitive de l'équation précédente

$$\begin{aligned} k(x) &= \int \frac{1}{x} dx \\ &= ln(\|x\|) + C \end{aligned}$$

On en déduit la valeur de la solution générale

$$\begin{aligned} y(x) &= k(x)e^{-x} \\ &= ln(\|x\|)e^{-x} + Ce^{-x} \end{aligned}$$

Équations différentielles linéaires du 1er ordre à coefficients constants - solution particulière - Principe de superposition **:**

Théorème 4 :

Soit l’équation

$$a.y'(x) + b.y(x) = f_1(x) + f_2(x) \qquad (E_s)$$

La solution de cette équation s’écrit

$$y_p(x) = y_{p1}(x) + y_{p2}(x)$$

où y_{p1} est la solution particulière de l’équation

$$a.y'(x) + b.y(x) = f_1(x) \qquad (E_{s1})$$

et où y_{p2} est la solution de l’équation

$$a.y'(x) + b.y(x) = f_2(x) \qquad (E_{s2})$$

Équations différentielles linéaires du 1er ordre à coefficients constants - solution particulière - Principe de superposition :

Démonstration:

Puisque que y_{p1} est une solution particulière de (E_{s1}), on a

$$a.y'_{p1}(x) + b.y_{p1}(x) = f_1(x)$$

et puisque y_{p2} est une solution particulière de (E_{s2}), on a

$$a.y'_{p2}(x) + b.y_{p2}(x) = f_2(x)$$

En additionnant les équations précédentes, on obtient

$$a.(y'_{p1}(x) + y'_{p2}(x)) + b.(y_{p2}(x) + y_{p2}(x)) = f_1(x) + f_2(x)$$

Ce qui prouve que la solution particulière de l'équation (E_s) est $y_p = y_{p1} + y_{p2}$

***<u>Équations différentielles linéaires du 1er ordre à coefficients constants - Méthodologie</u>* :**

- Est-ce que l’équation étudiée est bien une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants ?
    - a et b sont des constantes
    - f(x) est une fonction x est pas de y(x)
    - il n’y a pas de terme de second ordre (ou plus)

- Je cherche la solution de l’équation homogène associée à l’équation
- Je cherche la solution particulière de l’équation.
    - Est ce que f(x) appartient au tableau des solutions connues ?
    - Si non, utiliser la méthode de la variation de la constante.
- Appliquer les conditions initiales du problème de Cauchy pour résoudre complètement l’équation.

Équations différentielles linéaires du 2eme ordre à coefficients constants - Définition :

On appelle équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants une équation différentielle de la forme :

$$a.y''(x) + b.y'(x) + cy(x) = f(x) \quad \text{(E)}$$

où a, b et c sont des constantes ($a \neq 0$), f(x) une fonction connue de x et y(x) est la fonction de x à déterminer.

exemple :

$$y''(x) + 5y'(x) + 4y(x) = 4x^2 - 1$$

Dans cet exemple a=1, b=5, c=4 et $f(x)=4x^2-1$.

Équations différentielles linéaires du 2eme ordre homogène à coefficients constants - Définition :

On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre homogène à coefficients constants une équation différentielle de la forme :

$$a.y''(x) + b.y'(x) + cy(x) = 0 \qquad \text{(H)}$$

où a et b sont des constantes (a≠0), et où y(x) est la fonction de x à déterminer.

exemple :

$$y''(x) + 5y'(x) + 4y(x) = 0$$

Dans cet exemple a=1, b=5 et c=4.

Cette équation est une partie de la solution de l'équation précédente.

Équations différentielles linéaires du 2eme ordre homogène à coefficients constants - équation caractéristique :

On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre homogène à coefficients constants une équation différentielle de la forme :

$$a.y''(x) + b.y'(x) + cy(x) = 0 \qquad \text{(H)}$$

où a et b sont des constantes ($a \neq 0$), et où y(x) est la fonction de x à déterminer.

r doit être la solution de l'équation :

$$ar^2 + br + c = 0$$

dites équation caractéristique de l'équation différentielle (H)

Équations différentielles linéaires du 2eme ordre homogène à coefficients constants - équation caractéristique :

exemple :

$$y''(x) + 5y'(x) + 4y(x) = 0$$

L'équation caractéristique de cette équation est :

$$r^2 + 5r + 4 = 0$$

Équations différentielles linéaires du 2eme ordre homogène à coefficients constants - Résolution :

Théorème 1 :

- Si les racines de l'équation caractéristique r_1 et r_2 sont réelles et distinctes, alors la solution $y_h(x)$ de l'équation sans second membre est :

$$y_h(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$$

- Si les racines de l'équation caractéristique r_1 et r_2 sont réelles et confondues ($r_1 = r_2$) , alors la solution $y_h(x)$ de l'équation sans second membre est :

$$y_h(x) = (Ax + B)e^{rx}$$

- Si les racines de l'équation caractéristique r1 et r2 sont complexes et conjuguées (r1 = $\alpha + j\beta$ et r2 = $\alpha - j\beta$ où j est le nombre complexe tel que $j^2 = -1$), alors la solution $y_h(x)$ de l'équation sans second membre est :

$$y_h(x) = (A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))e^{\alpha x}$$

Équations différentielles linéaires du 2eme ordre homogène à coefficients constants - Résolution :

Exemple :

$$y''(x) + 5y'(x) + 4y(x) = 0$$

L'équation caractéristique de cette équation est :

$$r^2 + 5r + 4 = 0$$

$\Delta = 5^2 - 4.1.4 = 9 > 0$. La solution de l'équation est donc :

$$y_h(x) = Ae^{-4x} + Be^{-x}$$

Équations différentielles linéaires du 2eme ordre homogène à coefficients constants - Résolution :

Exercice :

Donner les solutions des équations différentielles suivantes :

- $y''(x) + y'(x) - 2y(x) = 0$
- $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0$
- $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 0$

Équations différentielles linéaires du 2eme ordre à coefficients constants - solutions particulières :

second membre	solution particulière
$f(x) = C$ où C est une constante	si c≠0, $y_p(x) = \frac{C}{c}$
	si c=0, $y_p(x) = \frac{C}{b}x$
$f(x) = P(x)$ où P est un polynôme de degré n, avec n∈N*	Où Q(x) est un polynôme tel que : $y_p(x) = Q(x)$
	si c≠0, alors deg(Q) = n
	si c=0 et b≠0, alors deg(Q) = n+1 et val(Q) = 1
	si c=0 et b=0, alors deg(Q) = n+2 et val(Q) = 2

Équations différentielles linéaires du 2eme ordre à coefficients constants - solutions particulières :

second membre	solution particulière
$f(x) = P(x)e^{sx}$ où P est un polynôme de degré n, n∈N*, et s un réel	$y_p(x) = Q(x)e^{sx}$ Où Q(x) est un polynôme tel que :
	si s n'est pas racine de l'équation caractéristique, alors deg(Q) = n
	si s est racine simple racine de l'équation caractéristique, alors deg(Q) = n+1 et val(Q) = 1
	si s est racine double racine de l'équation caractéristique, alors deg(Q) = n+2 et val(Q) = 2
$f(x) = \alpha\cos(\omega x + \varphi) + \beta\sin(\omega x + \varphi)$ où ω est un réel non-nul	Si $j\omega$ racine : $y_p(x) = x\left(A\cos(\omega x + \varphi) + B\sin(\omega x + \varphi)\right)$ sinon : $y_p(x) = A\cos(\omega x + \varphi) + B\sin(\omega x + \varphi)$

<u>Équations différentielles linéaires du 2eme ordre à coefficients constants - solutions particulières</u> :

Exercice :

Donner les solutions des équations différentielles suivantes :

- $y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = 2x+1$ avec $y(0)=0$ et $y'(0)=1$
- $\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{4}y(t) = 4$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0)=0$
- $y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = xe^x$