# TD : Résolution d'équations algébriques dans $\mathbb{C}$

Ce TD traite des équations algébrique dans $\mathbb{C}$ du second degré. A la fin de ce TD, vous devez savoir :

— Déterminer la racine carrée d'un nombre complexe.

— Résoudre des équations du second degrés dans $\mathbb{C}$

## 1.1 Racine carrée d'un complexe

**Définition 1**

On appelle racine carrée d'un complexe $a$, tout nombre complexe $z$ tel que $z^2 = a$.

**Proposition 1**

Tout complexe non nul admet deux racines carrées opposées .

**Démonstration** :
Soit deux complexes $z$ et $a$ tel que $z = re^{i\theta}$ soit une racine carrée de $a = \rho e^{i\phi}$.
Par définition, on a :

$$\rho^2 e^{2i\phi} = re^{i\theta}$$

ce qui équivaut à

$$\rho^2 = r \qquad \text{et } 2\phi \equiv \theta \quad [2\pi]$$

Le nombre complexe $z$ admet donc deux racines carrées opposées $\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $-\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}} = \sqrt{r}e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)}$

**Méthode** :

Pour rechercher les racines carrée $Z = X + iY$ d'un complexe non réel $z = x + iy$, on utilise les relation suivantes :

$$\mathrm{Re}(Z^2) = \mathrm{Re}(z) \tag{1}$$
$$|Z|^2 = |z| \tag{2}$$
$$\mathrm{Im}(Z^2) = \mathrm{Im}(z) \tag{3}$$

Les équations (1) et (2) nous permettent de trouver les valeurs absolues de $X$ et $Y$ :

$$X^2 + Y^2 = |z|$$
$$X^2 - Y^2 = \mathrm{Re}(z)$$

ce qui nous donne

$$X^2 = \frac{|z| + \mathrm{Re}(z)}{2}$$
$$Y^2 = \frac{|z| - \mathrm{Re}(z)}{2}$$

On a donc, pour le moment, quatre solutions possibles . Pour réduire le nombre de solutions, on utilise l'équation (3)

$$2XY = \mathrm{Im}(z)$$

Cette équation nous permet de déterminer le signe du produit $XY$ et réduit le nombre de solutions possible à deux.

*Exemple* : On recherche les racines complexes de $z = 1 + i$ sous la forme de deux complexes $Z_1 = X + iY$ et $Z_2 = -X - iY$. On a :

$$\mathrm{Re}(z) = 1$$
$$\mathrm{Im}(z) = 1 > 0$$
$$|z| = \sqrt{2}$$

En utilisant la méthode précédente :

$$X^2 = \frac{|z| + \mathrm{Re}(z)}{2} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$
$$Y^2 = \frac{|z| - \mathrm{Re}(z)}{2} = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$$

On sait que la partie imaginaire $\mathrm{Im}(z)$ est positive et que par conséquent le produit $XY$ est lui aussi positif. On en déduit les solutions :

$$Z_1 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}$$
$$Z_2 = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}$$

**Exercice 1 :**

Résoudre les équations suivantes en démontrant, pour chaque éléments, le résultat :

(a) $z = Z^2 = -7 + 24i$
(b) $z = Z^2 = -3 - 4i$
(c) $z = Z^2 = 1 + i\sqrt{3}$

## 1.2 Résolution d'une équation du second degré

**Proposition 2**

Soit $a$, $b$ et $c$ trois complexes, avec $a \neq 0$. Considérons l'équation :

$$az^2 + bz + c = 0. \quad (E)$$

On note $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

- Si $\Delta \neq 0$, alors en appelant $\delta$ une racine carrée de $\Delta$, l'équation (E) admet deux racines distinctes :
$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$$
et
$$z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}.$$
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation (E) admet une racine double
$$z_0 = \frac{-b}{2a}.$$

**Démonstration** :
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned}
az^2+bz+c &= a\left(z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}\right)\\
&= a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\\
&= a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)
\end{aligned}$$

— Supposons $\Delta \neq 0$ ; en notant $\delta$ une racine carrée de $\Delta$, on a :

$$az^2+bz+c = a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\delta^2}{4a^2}\right) = a\left(z+\frac{b-\delta}{2a}\right)\left(z+\frac{b+\delta}{2a}\right).$$

L'équation (E) admet donc deux racines distinctes : $-\frac{b+\delta}{2a}$ et $-\frac{b-\delta}{2a}$.

— Supposons $\Delta = 0$ ; alors $az^2+bz+c = a\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2$ et (E) admet une racine double $z_0 = -\frac{b}{2a}$.

**Exercice 2 :**

Résoudre les équations suivantes :

(a) $z^2-2(2+i)z+6+8i=0$

(b) $z^2+z+1=0$

(c) $iz^2+(4i-3)z+i-5=0$

(d) $z^2-\overline{z}+2=0$

**Proposition 3**

Soit $a$, $b$ et $c$ trois complexes, avec $a \neq 0$. Les nombres complexes $z_1$ et $z_2$ (éventuellement égaux) vérifient :

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$$

et

$$z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

si, et seulement si, $z_1$ et $z_2$ sont les deux racines (éventuellement confondues) de l'équation $az^2 + bz + c = 0$.

**Démonstration :**

— Si $z_1$ et $z_2$ sont les deux racines de l'équation, en utilisant les formules donnant les racines d'une équation du second degré on obtient facilement :

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$$

et

$$z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

— Réciproquement, si $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$, alors :

$$a(z - z_1)(z - z_2) = a\left(z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1 z_2\right) = az^2 + bz + c,$$

et donc l'équation $az^2 + bz + c = 0$ a pour racines $z_1$ et $z_2$ (éventuellement égales si $z_1 = z_2$).

**Exercice 3 :**

Résoudre les équations suivantes :

(a) $z^2 + (1 + a + a^2)z + a(1 + a^2) = 0$

(b) $z^2 - 2z\cos(\theta) + 1 = 0$

**Exercice 4 :**

On cherche à résoudre l'équation

$$z^3 + (1 + i)z^2 + (i - 1)z - i = 0.$$

(a) Rechercher une solution imaginaire pure $ai$ à l'équation.

(b) Déterminer $b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$z^3 + (1+i)z^2 + (i-1)z - i = (z - ai)(z^2 + bz + c).$$

(c) En déduire toutes les solutions de l'équation.

(d) Sur le même modèle, résoudre l'équation

$$z^3 - (2+i)z^2 + 2(1+i)z - 2i = 0.$$