<table>
<tr><td rowspan="6">A remplir par l'enseignent</td><td rowspan="6"></td><td colspan="3">EXAMEN 2024/2025</td></tr>
<tr><td colspan="3">Matière : Mathématiques</td></tr>
<tr><td colspan="3">Remis par : M. CHIVOT</td></tr>
<tr><td colspan="3">Promotion : I1 ☒ FISE ☐ FISA</td></tr>
<tr><td>Date : 09/10/24</td><td>Durée : 1h</td><td rowspan="2">☒ Sans calculatrice
☐ Calculatrice scientifique
☐ Calculatrice collège</td></tr>
<tr><td>Nbre de page :1</td><td>☒ Sans document
☐ Avec documents</td></tr>
</table>

A remplir par l'étudiant :

NOM : ……………………………………………………………….. Prénom : ………………………………………..

Promotion et groupe : ………………………………………………………………………………………………..

****

$\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ définie si $x \neq \dfrac{\pi}{2}\ (\pi)$	$\text{cotan}(x) = \dfrac{1}{\tan(x)} = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ définie si $x \neq 0\ (\pi)$

$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$	$1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$ si $x \neq \dfrac{\pi}{2}\ (\pi)$	$1 + \text{cotan}^2(x) = \dfrac{1}{\sin^2(x)}$ si $x \neq 0\ (\pi)$

$\cos(-a) = \cos(a)$	$\sin(-a) = -\sin(a)$	$\tan(-a) = -\tan(a)$	$\text{cotan}(-a) = -\text{cotan}(a)$

$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$	$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$	$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$	$\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$
$\sin(\pi - x) = \sin(x)$	$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$	$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$	$\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$
$\tan(\pi - x) = -\tan(x)$	$\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \text{cotan}(x)$	$\tan(\pi + x) = \tan(x)$	$\tan\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\text{cotan}(x)$

Valeurs remarquables :

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\Vert$	$-\sqrt{3}$	0

Formules d'addition

$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$	$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$	$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$
$\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$	$\tan(a-b) = \dfrac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$

En particulier on a les relations suivantes avec l'angle double :

$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$
$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$

$\tan(2a) = \dfrac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$

$\cos^2(a) = \dfrac{1 + \cos(2a)}{2}$
$\sin^2(a) = \dfrac{1 - \cos(2a)}{2}$

On dispose également de relations avec la tangente de l'angle moitié.

Si $a \neq \pi\ (2\pi)$, on pose $t = \tan\left(\dfrac{a}{2}\right)$ alors

$\cos(a) = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$	$\sin(a) = \dfrac{2t}{1 + t^2}$	$\tan(a) = \dfrac{2t}{1 - t^2}$

Formules de linéarisation :

$\sin(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$
$\cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$
$\sin(a)\sin(b) = -\dfrac{1}{2}\left[\cos(a+b) - \cos(a-b)\right]$

$\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$	
$\sin(p) - \sin(q) = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$	
$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$	Retenir " *si co co si co co* -2 *si si* "
$\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$	

Equations trigonométriques

$\cos(a) = \cos(b) \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \quad (2\pi) \\ a = -b \quad (2\pi) \end{cases}$
$\sin(a) = \sin(b) \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \quad (2\pi) \\ a = \pi - b \quad (2\pi) \end{cases}$
$\tan(a) = \tan(b) \Leftrightarrow a = b \quad (\pi)$

Lien avec l'exponentielle complexe

$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$

$\cos(x) = \mathrm{Re}(e^{ix}) = \dfrac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$	$\sin(x) = \mathrm{Im}(e^{ix}) = \dfrac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$

$e^{ia} + e^{ib} = 2\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}$	$1 + e^{ia} = 2\cos\left(\dfrac{a}{2}\right)e^{i\left(\frac{a}{2}\right)}$
$e^{ia} - e^{ib} = 2i\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}$	$1 - e^{ia} = -2i\sin\left(\dfrac{a}{2}\right)e^{i\left(\frac{a}{2}\right)}$

Devoir surveillé

Exercice 1 :

1. En utilisant les formules trigonométriques, démontrer que :

$$\frac{\cos p - \cos q}{\sin p + \sin q} = -\tan\frac{p-q}{2}$$

2. En posant $p = \frac{\pi}{4}$ et $q = \frac{\pi}{6}$, donner la valeur exacte de $\tan\frac{\pi}{24}$.

Exercice 2 :

Déterminer le conjugué de chaque nombre complexe et donner la forme algébrique de ce conjugué (forme a+ ib).

1. $z = (3+i)(-13-2i)$
2. $z = i(1-i)^3$
3. $z = \dfrac{2-3i}{8+5i}$
4. $z = \dfrac{2}{i+1} - \dfrac{3}{1-i}$

Solution:

1. $z = (3+i)(-13-2i)$

$$\begin{aligned} z &= (3+i)(-13-2i) \\ &= 3\times(-13) + 3\times(-2i) + i\times(-13) + i\times(-2i) \\ &= -39 - 6i - 13i + 2 \\ &= -37 - 19i \\ \overline{z} &= -37 + 19i \quad \text{(conjugué de } z\text{)} \end{aligned}$$

2. $z = i(1-i)^3$

$$\begin{aligned}
(1-i)^3 &= (1-i)(1-i)(1-i)\\
&= (1-i)(1-i) = 1-2i+i^2 = 1-2i-1 = -2i\\
(1-i)^3 &= (-2i)(1-i) = -2i+2i^2 = -2i-2 = -2-2i\\
z &= i(-2-2i) = i\times(-2) + i\times(-2i) = -2i+2\\
z &= 2-2i\\
\overline{z} &= 2+2i \quad \text{(conjugué de } z\text{)}
\end{aligned}$$

3. $z = \dfrac{2-3i}{8+5i}$
   On multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur :

$$\begin{aligned}
z &= \frac{(2-3i)(8-5i)}{(8+5i)(8-5i)}\\
&= \frac{16-10i-24i+15i^2}{64-25i^2}\\
&= \frac{16-34i-15}{64+25}\\
&= \frac{1-34i}{89}\\
&= \frac{1}{89} - \frac{34i}{89}\\
\overline{z} &= \frac{1}{89} + \frac{34i}{89} \quad \text{(conjugué de } z\text{)}
\end{aligned}$$

4. $z = \dfrac{2}{i+1} - \dfrac{3}{1-i}$
   Calculons chaque fraction séparément en multipliant par le conjugué :

$$\frac{2}{i+1} = \frac{2(i-1)}{(i+1)(i-1)} = \frac{2i-2}{1+1} = \frac{2i-2}{2} = i-1$$

$$\frac{3}{1-i} = \frac{3(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{3+3i}{1+1} = \frac{3+3i}{2} = \frac{3}{2} + \frac{3i}{2}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
z &= (i-1) - \left(\frac{3}{2} + \frac{3i}{2}\right) \\
&= i - 1 - \frac{3}{2} - \frac{3i}{2} \\
&= i - \frac{3i}{2} - 1 - \frac{3}{2} \\
&= \left(1 - \frac{3}{2}\right) i + \left(-1 - \frac{3}{2}\right) \\
&= \frac{2}{2} - \frac{3}{2} i - \frac{5}{2} \\
&= -\frac{5}{2} - \frac{i}{2} \\
\overline{z} &= -\frac{5}{2} + \frac{i}{2} \quad \text{(conjugué de } z\text{)}
\end{aligned}$$

Exercice 3 :

1. Soient z un nombre complexe. Démontrer que

$$\frac{z + \overline{z}}{1 + z\overline{z}}$$

est réel.

2. Soient z et z' deux nombres complexes de module 1 tels que $zz' \neq -1$. Démontrer que

$$\frac{z + z'}{1 + zz'}$$

est réel.

Solution:

1. Soit z un nombre complexe. Démontrons que

$$\frac{z + \overline{z}}{1 + z\overline{z}}$$

est réel.

Le produit $z\overline{z}$ est donné par :

$$z\overline{z} = |z|^2,$$

L'addition $z + \overline{z}$ est donné par :

$$z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z),$$

L'expression devient alors :

$$\frac{z + \overline{z}}{1 + z\overline{z}} = \frac{2\mathrm{Re}(z)}{1 + |z|^2}.$$

On conclut donc que l'expression est réelle.

2. Soient z et z' deux nombres complexes de module 1, c'est-à-dire $|z| = |z'| = 1$, et supposons que $zz' \neq -1$. Montrons que

$$\frac{z + z'}{1 + zz'}$$

est réel.

Comme z et z' sont des nombres complexes de module 1, on a $z\overline{z} = z'\overline{z'} = 1$. Pour montrer que l'expression est réelle, il suffit de prouver que l'expression est égale à son conjugué, c'est-à-dire que :

$$\frac{z + z'}{1 + zz'} = \overline{\left(\frac{z + z'}{1 + zz'}\right)}.$$

Calculons le conjugué de l'expression. On a :

$$\overline{\left(\frac{z + z'}{1 + zz'}\right)} = \frac{\overline{z} + \overline{z'}}{1 + \overline{z}\overline{z'}}.$$

Puisque $|z| = |z'| = 1$, on sait que $\overline{z} = \frac{1}{z}$ et $\overline{z'} = \frac{1}{z'}$. En remplaçant ces valeurs, on obtient :

$$\frac{\overline{z} + \overline{z'}}{1 + \overline{z}\overline{z'}} = \frac{\frac{1}{z} + \frac{1}{z'}}{1 + \frac{1}{zz'}} = \frac{\frac{z'+z}{zz'}}{\frac{zz'+1}{zz'}} = \frac{z + z'}{1 + zz'}.$$

Ainsi, l'expression est égale à son conjugué, ce qui prouve qu'elle est réelle.