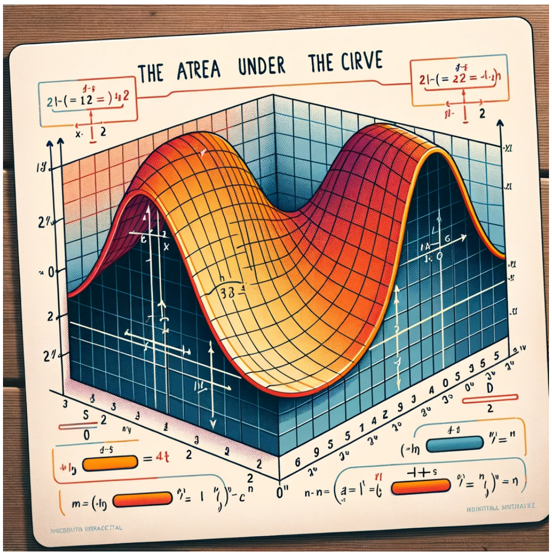
Primitives et intégrales

Guillaume Chivot



Introduction

Ce cours est consacré aux calculs de primitives et d'intégrales. Les intégrales ont une multitude d'applications dans des domaines aussi variés que

- La physique avec le travail des forces.
- L'ingénierie avec les calculs de d'aires et de volumes ou en analyse des signaux.
- L'économie où elles permettent de calculer des surplus entre consommation et production.
- Les sciences de la vie qui utilise massivement les probabilités.

Ils sont un outils incontournable, aussi bien pour les futurs ingénieurs, que les futurs techniciens.

1 Les primitives

Avant d'aborder les intégrales, il est necessaire de comprendre ce qu'est une primitive . Commençons par en donner sa définition :

Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle primitive de f sur I toute fonction F dérivable sur I et dont la dérivée est égale à f.

$$\forall x \in I, F'(x) = f(x)$$

On peut donc voir la primitive comme "l'inverse de la dérivée". Par exemple, on sait que la dérivée de la fonction $f(x) = \frac{x^2}{2}$ est $f'(x) = x$. $F(x) = \frac{x^2}{2}$ est donc une primitive de la fonction $f(x) = x$. De la même manière, on sait que la dérivée de la fonction $f(x) = \frac{x^3}{3}$ est $f'(x) = x^2$. $F(x) = \frac{x^3}{3}$ est donc une primitive de la fonction $f(x) = x^2$.

Le tableau suivant donne quelques primitives usuelles :

Fonction	**Primitive**	**Intervalles**
$f(x) = a$ (constante)	ax	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ (avec $n \neq -1$)	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\ln\|x\|$	$]0, +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ (avec $n \neq 1$)	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = e^x$	e^x	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \tan x$	$-\ln\|\cos x\|$	$\mathbb{R}$

Il est important de noter que la primitive d'une fonction $f(x)$ n'est pas unique. Ajouter une constante à une primitive ne change pas sa fonction. En effet, si je dérive la fonction $f(x) = \frac{x^2}{2}$ ou la fonction $g(x) = \frac{x^2}{2} + 5 = f(x) + 5$, on retrouve $f'(x) = g'(x) = x$. D'où la proposition suivante :

Proposition 1

Soit f une fonction définie sur I. Si F est une primitive de f sur I, alors l'ensemble des primitives de f est :

$$\{F + C; C \in \mathbb{R}\}$$

c'est-à-dire qu'une fonction G est une primitive de f si, et seulement si :

$$\exists C \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in I, \quad G(x) = F(x) + C.$$

Démonstration :
Si F est la primitive de f, cela veut dire que la dérivée de F est f. Or, la dérivée de G est égale à la dérivée de F, car C est une constante. Donc G est une primitive de f.

On note $\int f(x)dx$ l'ensembles des primitives de f sur un intervalle I. Ainsi si F est une primitive de f sur I, on écrit

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

La constante C est appelée constante d'intégration . Elle se calcule grâce à une condition initiale, qui est souvent $F(0)$ égale à une constante.

Exercice 1

Trouver la primitive $F(x)$ de $f(x) = \sin x$ qui vérifie la condition initiale $F(0) = 1$

Les notions de primitive et de dérivée ont plusieurs propriétés communes. Commençons par l'associativité :

Proposition 2

Soit f et g deux fonctions continues sur I et F (respectivement G) une primitive de f (respectivement de g) sur I. Alors pour tout couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\lambda F + \mu G$ est une primitive sur I de la fonction $\lambda f + \mu g$.

Démonstration :
La dérivation est une opération linéaire, c'est à dire $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$. Si on applique cela à la fonction $\lambda F + \mu G$, on obtient

$$\begin{aligned}(\lambda F + \mu G)' &= \lambda F' + \mu G' \\ &= \lambda f + \mu g\end{aligned}$$

Ce résultat permet de trouver les primitives des toutes les fonctions polynomiales. Plus précisément, le polynôme :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

admet pour primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$$

Exercice 2

Donner la primitive de $f(x) = 5x^5 + 3x^3 + x$

L'exemple des polynômes est un exemple simple. Le prochaine exercice donne un exemple un peu plus complexe mais très important que nous reverrons dans la suite du cours.

Exercice 3

Soit α et β deux réels distincts et I un intervalle ne contenant ni α ni β. On considère la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}$$

1. Déterminer des constantes A et B telles que :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}$$

2. Donner une primitive de f sur I.

La question 2 de l'exercice précédent, bien qu'assez simple, demande d'intégrer des fonctions composées. En inversant le processus de dérivée de la composée de deux fonctions, on obtient le résultat suivant :

Proposition 3

Soit u une fonction dérivable sur I et à valeurs dans J et ϕ une fonction dérivable sur J. Alors la fonction $x \mapsto u'(x)\phi'(u(x))$ admet la fonction $x \mapsto \phi(u(x))$ comme primitive sur I.

Exercice 4

Soit α un réel n'appartenant pas à l'intervalle I. Trouver une primitive sur I de la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{1}{(x-\alpha)^2}.$$

Exercice 5

Déterminer les primitives des fonctions :

1. $f : x \mapsto \tan(x)$ sur $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (sans utiliser le résultat donné dans le tableau) ;
2. $g : x \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Dans l'exercice 4, on peux réécrire $f(x)$ comme une fonction $f(x) = g(x-\alpha)$, avec $g(x) = \frac{1}{x^2}$. On peut calculer, de manière générale, ce type de fonction :

Corollaire 1

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et F sa primitive. Alors la fonction $g(x) = f(ax+b)$ admet pour primitive la fonction $G(x) = \frac{1}{a}F(ax+b)$.

Démonstration :
Pour démontrer que la primitive de la fonction $g(x) = f(ax+b)$ est bien $G(x) = \frac{1}{a}F(ax+b)$, il suffit de dériver $G(x)$:

$$\begin{aligned} G'(x) &= \left(\frac{1}{a}F(ax+b)\right)' \\ &= (ax+b)'\frac{1}{a}F'(ax+b) \\ &= a\frac{1}{a}f(ax+b) \\ &= f(ax+b) \end{aligned}$$

Exercice 6

Déterminer les primitives de la fonction $f(x) = \sqrt{5x+2}$.

Nous allons voir dans l'exercice suivant un autre cas d'intégration important pour la suite :

Exercice 7

Soit $\gamma \in \mathbb{R}^*$. La primitive primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+\gamma^2}$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{\gamma}\arctan\left(\frac{x}{\gamma}\right) \end{aligned}$$

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\beta \neq 0$. Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{(x-\alpha)^2+\beta^2} \end{aligned}$$

Méthode :

En s'inspirant des exercices 3, 5 et 7, on peut déterminer les primitives de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et a non nul. Pour cela, on distingue trois cas en fonction du nombre de racines réelles du polynôme $P = aX^2 + bX + c$ (ou du signe du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$) :

- Si le polynôme P a deux racines réelles distinctes ($\Delta > 0$), alors on utilise la technique vue dans l'exercice 3. Si $\Delta > 0$, le polynôme possède deux racines α et β. La fonction f peut donc se réécrire sous la forme :

  $$f(x) = \frac{1}{a(x-\alpha)(x-\beta)}$$

  On va chercher $f(x)$ sous la forme

  $$f(x) = \frac{A}{(x-\alpha)} + \frac{B}{(x-\beta)}$$

  avec A et B à déterminer. Il ne reste plus qu'à trouver la primitive de $f(x)$:

  $$F(x) = A \ln \|x-\alpha\| + B \ln \|x-\beta\|$$

- Si le polynôme P a une unique racine réelle ($\Delta = 0$), alors on utilise la technique vue dans l'exercice 5. Si $\Delta = 0$, le polynôme possède une racine α. La fonction f peut donc se réécrire sous la forme :

  $$f(x) = \frac{1}{a(x-\alpha)^2}$$

  On trouve la primitive de $f(x)$:

  $$F(x) = -\frac{1}{a(x-\alpha)}$$

- Si le polynôme P n'a pas de racine réelle ($\Delta < 0$), alors on met le dénominateur sous forme canonique $\frac{a}{(X-\alpha)^2+\beta^2}$ puis on utilise la technique vue dans l'exercice 7.

Exercice 8

- Déterminer les primitives de $f_1 : x \mapsto \frac{1}{x^2-3x+2}$.
- Déterminer les primitives de $f_2 : x \mapsto \frac{1}{x^2-4x+4}$.
- Déterminer les primitives de $f_3 : x \mapsto \frac{1}{x^2+x+1}$.

Exercice 9

[**Difficile**] Soit un projectile lancé à une vitesse initiale v_0 dans un environnement où la résistance de l'air est significative. La résistance de l'air agit généralement en opposition au vecteur vitesse du projectile et est souvent modélisée comme étant proportionnelle au carré de la vitesse pour des vitesses élevées. L'équation du mouvement peut être formulée comme suit:

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - kv^2$$

où:

- m est la masse du projectile.
- v est la vitesse du projectile.
- g est l'accélération due à la gravité.
- k est un coefficient qui représente la résistance de l'air.

Résoudre cette équation.

1.1 méthodes de calculs de primitives

Il existe plusieurs méthodes permettant le calcul de primitives. Nous allons en voir deux dans cette partie

Intégrations par parties

La méthode d'intégration par partie est connue depuis le lycée. Elle permet de transformer un primitive difficile à calculer en une autre plus simple. Elle est particulièrement utile quand une exponentielle apparait dans la primitive. Elle se définit de la façon suivante :

Proposition 4: Intégration par parties

Soient $u = u(x)$ et $v = v(x)$ deux fonctions dérivables sur lintervalle I, avec u et v continues sur I. Alors :

$$\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx$$

Démonstration :
La règle de dérivation dun produit sécrit $(uv)' = u'v + uv'$. En intégrant cette relation, on obtient $\int (uv)'\,dx = \int u'v\,dx + \int uv'\,dx$. Or une primitive de $(uv)'$ est évidemment uv. On obtient donc la formule d'intégration par parties : $\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx$.

Nous avons vu que la primitive de la fonction $\frac{1}{x}$ est la fonction $\ln(x)$. Mais qu'en est il de la primitive de la fonction $\ln(x)$? Une intégration par parties permet de la retrouver rapidement. En effet, une primitive de la fonction $x \mapsto \ln x$ sur $\mathbb{R}_*^+$ est donnée par :

$$\mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int \ln t\,dt.$$

Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$ fixé. Les fonctions :

$$u : t \mapsto \ln t \quad \text{et} \quad v : t \mapsto t$$

sont de classe dérivable sur $\mathbb{R}$. Une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}\int \ln t\,dt &= \int u(t)v'(t)\,dt \\ &= uv - \int u'(t)v(t)\,dt \\ &= t\ln t - \int dt \\ &= x\ln x - x + C.\end{aligned}$$

Exercice 10

Calculer $I = \int (2x-1)e^{2x}$

Exercice 11

À l'aide de deux intégrations par parties, déterminer les primitives de la fonction $x \mapsto x^2 e^x$ sur $\mathbb{R}$.

Changement de variable

Proposition 5

Soit f une fonction continue sur un intervalle I dans $\mathbb{R}$ et ϕ une une fonction continue et dérivable sur I. Alors :

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\,dx = F(\phi(x))$$

Nous allons voir un exemple en cherchant la primitive de $\int \sin^2 u \cos u\,du$ La fonction $\phi : u \mapsto \sin u$ est une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\int \sin^2 u \cos u\,du = \int \phi^2(u)\phi'(u)\,du = \frac{1}{3}\sin^3 x + C$$

Exercice 12

Calculer $\int 2x \cos x^2 dx$

Exercice 13

Calculer $\int 6x^2(2x^3+5)^6 dx$

Une des techniques les plus efficaces pour calculer des primitives consiste à utiliser la méthode précédente pour effectuer un changement de variable. L'idée est la suivante : on remplace dans $\int f(x)\,dx$ la variable x par une autre variable t, avec une relation entre les deux, par exemple $x = g(t)$, où g est dérivable et g' est continue. On exprime ainsi x en fonction de t et dx en fonction de dt, grâce à la notation de Leibniz :

$$\frac{dx}{dt} = g'(t) \Leftrightarrow dx = g'(t)\,dt,$$

et on les remplace dans la primitive à calculer. La formule du changement de variable s'écrit alors

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt.$$

Méthode :

Nous allons illustrer la méthode précédente en calculant les primitives $F(x)$ de $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$ grâce au changement de variable $x = \tan(t)$.

1. On commence par calculer $\frac{dx}{dt}$. On a alors

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{d(\tan(t))}{dt} \\ &= 1 + \tan^2(t)\end{aligned}$$

2. On en déduit dx en fonction de dt :

$$dx = \left(1 + \tan^2(t)\right) dt,$$

3. On remplace x et dx par leurs expressions

$$\begin{aligned}F(x) &= \int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx \\ &= \int \frac{1}{\left(1+\tan^2(t)\right)^2} \cdot \left(1 + \tan^2(t)\right) dt \\ &= \int \frac{1}{1+\tan^2(t)} dt = \int \cos^2(t)\, dt.\end{aligned}$$

Cette dernière primitive se calcule par linéarisation, et il vient

$$F(x) = \frac{1}{2} \int (1 + \cos(2t))\, dt = \frac{1}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right] + C.$$

4. On réécrit la fonction $F(x)$ en fonction de x et non plus de t. Pour cela, on a $t = \arctan(x)$, et par ailleurs

$$\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t) = \frac{2\tan(t)}{1+\tan^2(t)} = \frac{2x}{1+x^2}.$$

On obtient donc finalement

$$F(x) = \frac{1}{2}\left[\arctan(x) + \frac{x}{1+x^2}\right] + C.$$

Exercice 14

Calculer, grâce à un changement de variable :

$$\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx \quad \text{en posant} \quad x = t^2$$

2 Les intégrales

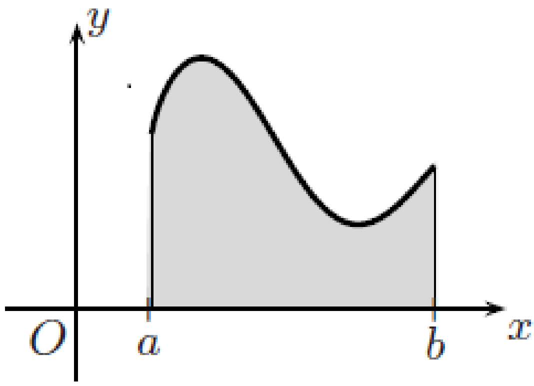


Figure 1: Figure représentant l'aire sous la courbe entre les points a et b.

Commençont par donner une définition de ce qu'est une intégrale : Soit f une fonction définie et continue sur $[a, b]$, avec $a \leq b$. Alors l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

représente l'aire algébrique comprise entre la courbe représentative (C) de f et l'axe des x, d'une part, et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$, d'autre part. On peut voir une représentation figure 1.

On peut relier les notions d'intégrales et de primitives :

Définition 2

Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[a, b]$. On appelle intégrale de f sur $[a, b]$ le nombre I donné par :

$$I = \int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b.$$

où F est une primitive de f sur $[a, b]$.

Ainsi $\int_a^b f(x)\, dx$ se réduit à la différence des primitives $F(x)$ de $f(x)$ avec $x = a$ et $x = b$. Notons ici que le choix de la primitive ne change pas le résultat, car la différence annule la constante.

Exercice 15

Calculer :

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx$$

Dans la suite, nous allons voir quelques propriétés élémentaires des intégrales.

Proposition 6: Relation de Chasles

Soit f définie et continue sur l'intervalle I et soient a, b et c trois points de I. Alors on a la relation de Chasles :

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx. \tag{15.3}$$

Démonstration :
Il suffit d'utiliser la définition de l'intégrale. Soit F une primitive de f sur I. On a

$$\int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx = [F(c) - F(a)] + [F(b) - F(c)] = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Proposition 7

Soit f définie et continue sur l'intervalle I et soient a, $b \in I$. Alors

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx. \tag{15.4}$$

Démonstration :
La première égalité s'obtient en prenant $c = b$ dans la relation de Chasles. Elle résulte aussi de l'interprétation géométrique, puisque l'aire sous la courbe entre a et a est nulle. La deuxième égalité s'obtient en remplaçant b par a et a par b dans la relation de Chasles.

Proposition 8

Soit $a \geq 0$. Soit f définie et continue sur $[-a, +a]$. On suppose que f est paire. Alors

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$

Proposition 9

Soit $a \geq 0$. Soit f définie et continue sur $[-a, +a]$. On suppose que f est impaire. Alors

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0.$$

Proposition 10

Soient f et g deux fonctions définies et continues sur $[a, b]$, et soit α une constante. Alors

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx,$$
$$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx.$$

Proposition 11

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Alors :

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Proposition 12

Soient deux fonctions f et g en escalier sur $[a,b]$.

- Si $f>0$, alors $\int_a^b f\,dx > 0$ (positivité).
- Si $f\leq g$, alors $\int_a^b f\,dx \leq \int_a^b g\,dx$ (croissance de l'intégrale).

Intégration par partie

Proposition 13

Soient $u=u(x)$ et $v=v(x)$ deux fonctions dérivables sur $[a,b]$, avec u' et v' continues sur $[a,b]$. On a par définition de l'intégrale la formule d'intégration par parties pour les intégrales :

$$\int_a^b uv'\,dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'v\,dx. \quad (15.6)$$

Exemple Calculer $I=\int_0^1(2x-1)e^{2x}\,dx$. Il est logique d'intégrer par parties en dérivant $2x-1$ et en intégrant l'exponentielle. On choisit $u=2x-1$ et $v'=e^{2x}$, d'où $u'=2$ et $v=\frac{1}{2}e^{2x}$. En appliquant la formule d'intégration par parties, il vient

$$I=\frac{1}{2}(2x-1)e^{2x}\Big|_0^1-\int_0^1 2\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}\left(e^2+1\right)-\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1=1.$$

Exemple En intégrant 2 fois par parties, calculer $J=\int_0^\pi e^{-x}\cos(x)\,dx$. On intègre par parties une première fois en posant $u=e^{-x}$ et $v'=\cos(x)$, d'où $u'=-e^{-x}$ et $v=\sin(x)$. Il vient

$$J=e^{-x}\sin(x)\big|_0^\pi+\int_0^\pi e^{-x}\sin(x)\,dx=\int_0^\pi e^{-x}\sin(x)\,dx,$$

en notant que le calcul se poursuit pour résoudre l'intégrale.

puisque $\sin(0)=\sin(\pi)=0$. On intègre une deuxième fois par parties en dérivant à nouveau l'exponentielle, c'est-à-dire en posant $u=e^{-x}$ et $v'=\sin(x)$, d'où $u'=-e^{-x}$ et $v=-\cos(x)$. On obtient

$$J=-e^{-x}\cos(x)\big|_0^\pi-\int_0^\pi e^{-x}\cos(x)\,dx=e^{-\pi}+1-J.$$

Il apparaît l'équation $J=e^{-\pi}+1-J$, d'inconnue J, qui se résout facilement et on trouve finalement $J=\frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)$.

Attention :
Cet exemple montre que l'intégration par parties n'est pas, à proprement parler, une méthode de calcul des intégrales. Elle permet en fait de transformer une intégrale en une autre. Dans l'exemple précédent, après deux intégrations par parties on retombe sur J, ce qui donne J. Mais on n'a pas calculé explicitement la primitive de $e^{-x}\cos(x)$.

Exercice 16

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,dt$
2. $J = \int_0^1 x(\arctan x)^2\,dx$

Correction exercice 16

1. On commence par intégrer par parties en posant $u'(t) = \frac{1}{t^2}$ et $v(t) = \ln(1+t)$, ce qui donne $u(t) = -\frac{1}{t}$ et $v'(t) = \frac{1}{1+t}$. On obtient donc
$$I = \left[-\frac{\ln(1+t)}{t}\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{dt}{t(t+1)} = -\frac{\ln(3)}{2} + \ln(2) + \int_2^1 \frac{dt}{t(t+1)}.$$
On calcule la dernière intégrale en réalisant une décomposition en éléments simples. Plus précisément, on remarque que
$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}.$$
Ainsi il vient
$$\int_1^2 \frac{dt}{t(t+1)} = [\ln(t) - \ln(t+1)]_1^2 = 2\ln(2) - \ln(3).$$
Finalement, on trouve $I = -\frac{3\ln(3)}{2} + 3\ln(2)$.
2. On intègre par parties, en posant $u'(x) = x$ et $v(x) = (\arctan x)^2$. On a $v'(x) = \frac{2\arctan(x)}{x^2+1}$, et ceci nous incite à considérer comme primitive de u' la fonction $u(x) = \frac{1}{2}(x^2+1)$, ce qui va simplifier les calculs. On obtient alors
$$J = \frac{1}{2}\left[(x^2+1)(\arctan x)^2\right]_0^1 - \int_0^1 \arctan x\,dx.$$
On calcule la dernière intégrale en réalisant à nouveau une intégration par parties, et on trouve :
$$J = \frac{\pi^2}{16} - [x\arctan x]_1^0 + \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]_0^1 = \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2.$$

Changement de variable

Rappelons comment on change de variable pour les primitives. Si $x = g(t)$, où g est dérivable de dérivée continue, on remplace x en fonction de t, et dx en fonction de dt pour obtenir la formule. Pour passer aux intégrales, on prend les bornes dans les primitives. On prendra garde que, dans la deuxième primitive, la variable d'intégration est t. Il faudra donc remplacer, dans le changement de variable, les bornes $[a, b]$ pour x par les bornes $[\alpha, \beta]$ pour t. Ainsi on obtient la formule

Proposition 14

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt,$$

où $a = g(\alpha)$ et $b = g(\beta)$.

Méthode :

Nous allons illustrer la méthode précédente en calculant l'iontégrale $I = \int_1^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ en posant $t = 1 + \sqrt{x}$.

1. On commence par calculer $\frac{dt}{dx}$. On a alors
$$\begin{aligned}\frac{dt}{dx} &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2(t-1)}\end{aligned}$$

2. On en déduit dx en fonction de dt :
$$dx = 2(t-1)dt.$$

3. On calcule les bornes de l'intégrale en fonction de t :
   - si $x = 1$, alors $t = 1 + \sqrt{1} = 2$
   - si $x = 4$, alors $t = 1 + \sqrt{4} = 3$

4. On remplace x et dx par leurs expressions en fonction de t et on n'oublie pas de changer les bornes d'intégrations
$$\begin{aligned}I &= \int_{x=1}^{x=4} \frac{dx}{1+\sqrt{x}} \\ &= \int_{t=2}^{t=3} \frac{2(t-1)}{t}\, dt \\ &= 2\int_2^3 \left(1 - \frac{1}{t}\right) dt \\ &= 2[t - \ln|t|]_2^3 = 2(1 - \ln 3 + \ln 2) \\ &= 2\left(1 - \ln\frac{3}{2}\right).\end{aligned}$$

Attention :
Contrairement au cas des primitives, où on devait réécrire la fonction F(x) en fonction de x, pour les intégrales, ce n'est pas nécessaire. Cette opération est en fait intégrer dans le changement des bornes d'intégration !

Exercice 17

1. En effectuant le changement de variables indiqué, calculer les intégrales suivantes :
   - $\int_0^1 \frac{1}{1+e^t}\,dt$ en posant $x = e^t$.
   - $\int_1^3 \frac{\sqrt{t}}{t+1}\,dt$ en posant $x = \sqrt{t}$.
   - $\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}\,dt$ en posant $t = \sin\theta$.

Correction exercice 17

1. La fonction $t \mapsto e^t$ est dérivable sur $[0,1]$, à valeurs dans $[1,e]$. Posons $x = e^t$, de sorte que pour $t = 0$ on a $x = 1$ et pour $t = 1$, on a $x = e$. En dérivant, on a de plus $\frac{dx}{dt} = e^t dt$ et donc $dt = \frac{dx}{e^t} = \frac{dx}{x}$. Ainsi, $\frac{dt}{e^t+1} = \frac{1}{x(x+1)}$. Il vient
$$\int_0^1 \frac{dt}{1+e^t} = \int_1^e \frac{dx}{x(1+x)}.$$
On calcule cette dernière intégrale en remarquant que $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$, d'où l'on tire
$$\int_0^1 \frac{dt}{1+e^t} = \int_1^e \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx = [\ln(x) - \ln(x+1)]_1^e = \ln(2) - \ln(e+1).$$

2. La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est dérivable sur $[1,3]$ avec pour image $[1,\sqrt{3}]$. Posons $x = \sqrt{t}$ de sorte que, lorsque $t = 1$, on a $x = 1$ et lorsque $t = 3$, on a $x = \sqrt{3}$. En dérivant, on trouve $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ de sorte que $dt = 2x dx$. Ainsi, $\sqrt{\frac{t}{t+1}} dt = \frac{x}{x^2+1} \cdot 2x dx = \frac{2x^2}{x^2+1} dx$. On va calculer l'intégrale résultant du changement de variables en remarquant que $\frac{x^2}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}$. Finalement, on trouve que
$$\int_1^3 \sqrt{\frac{t}{t+1}} dt = 2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{x^2+1} dx = 2\left(\sqrt{3} - 1 - \arctan(\sqrt{3}) + \arctan(1)\right) = 2\sqrt{3} - 2 - \frac{\pi}{6}.$$

3. La fonction $\theta \mapsto \sin(\theta)$ est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, à valeurs dans $[-1,1]$. Si on pose $t = \sin\theta$, on a en dérivant $dt = \cos(\theta) d\theta$. De plus, pour $\theta = -\frac{\pi}{2}$, on a $t = -1$ et pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, on a $t = 1$. On a donc $\sqrt{1-x^2} dx = \sqrt{1-\sin^2\theta} \cos(\theta) d\theta = |\cos\theta| \cdot \cos(\theta) d\theta = \cos^2(\theta)$ car $\cos(\theta) \geq 0$ puisque $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Il vient
$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta) d\theta = \frac{\pi}{2} + \left[\frac{\sin(2\theta)}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$