TD : Résolution d'équations algébriques dans $\mathbb{C}$

Ce TD traite des équations algébrique dans $\mathbb{C}$ du second degré. A la fin de ce TD, vous devez savoir :

— Déterminer la racine carrée d'un nombre complexe.

— Résoudre des équations du second degrés dans $\mathbb{C}$

1.1 Racine carrée d'un complexe

Définition 1

On appelle racine carrée d'un complexe a, tout nombre complexe z tel que $z^2 = a$.

Proposition 1

Tout complexe non nul admet deux racines carrées opposées .

Démonstration :
Soit deux complexes z et a tel que $z = re^{i\theta}$ soit une racine carrée de $a = \rho e^{i\phi}$.
Par définition, on a :

$$\rho^2 e^{2i\phi} = re^{i\theta}$$

ce qui équivaut à

$$\rho^2 = r \qquad \text{et } 2\phi \equiv \theta \quad [2\pi]$$

Le nombre complexe z admet donc deux racines carrées opposées $\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $-\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}} = \sqrt{r}e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)}$

Méthode :

Pour rechercher les racines carrée $Z = X + iY$ d'un complexe non réel $z = x + iy$, on utilise les relation suivantes :

$$\mathrm{Re}(Z^2) = \mathrm{Re}(z) \tag{1}$$
$$|Z|^2 = |z| \tag{2}$$
$$\mathrm{Im}(Z^2) = \mathrm{Im}(z) \tag{3}$$

Les équations (1) et (2) nous permettent de trouver les valeurs absolues de X et Y :

$$X^2 + Y^2 = |z|$$
$$X^2 - Y^2 = \mathrm{Re}(z)$$

ce qui nous donne

$$X^2 = \frac{|z| + \mathrm{Re}(z)}{2}$$
$$Y^2 = \frac{|z| - \mathrm{Re}(z)}{2}$$

On a donc, pour le moment, quatre solutions possibles . Pour réduire le nombre de solutions, on utilise l'équation (3)

$$2XY = \mathrm{Im}(z)$$

Cette équation nous permet de déterminer le signe du produit XY et réduit le nombre de solutions possible à deux.

Exemple : On recherche les racines complexes de $z = 1 + i$ sous la forme de deux complexes $Z_1 = X + iY$ et $Z_2 = -X - iY$. On a :

$$\mathrm{Re}(z) = 1$$
$$\mathrm{Im}(z) = 1 > 0$$
$$|z| = \sqrt{2}$$

En utilisant la méthode précédente :

$$X^2 = \frac{|z| + \mathrm{Re}(z)}{2} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$
$$Y^2 = \frac{|z| - \mathrm{Re}(z)}{2} = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$$

On sait que la partie imaginaire $\mathrm{Im}(z)$ est positive et que par conséquent le produit XY est lui aussi positif. On en déduit les solutions :

$$Z_1 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}$$
$$Z_2 = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}$$

Exercice 1 :

Résoudre les équations suivantes en démontrant, pour chaque éléments, le résultat :

(a) $z = Z^2 = -7 + 24i$
(b) $z = Z^2 = -3 - 4i$
(c) $z = Z^2 = 1 + i\sqrt{3}$

Solution: On a donc

(a) $Z^2 = -7 + 24i$

$$|z| = \sqrt{7^2 + 24^2} = \sqrt{625} = 25$$
$$X^2 = \frac{|z| + \mathrm{Re}(z)}{2} = \frac{25-7}{2} = 9$$
$$Y^2 = \frac{|z| - \mathrm{Re}(z)}{2} = \frac{25+7}{2} = 16$$

On a donc $Z = 3 + 4i$ ou $Z = -3 - 4i$.

(b) $Z^2 = -3 - 4i$

$$|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$
$$X^2 = \frac{|z| + \mathrm{Re}(z)}{2} = \frac{5-3}{2} = 1$$
$$Y^2 = \frac{|z| - \mathrm{Re}(z)}{2} = \frac{5+3}{2} = 4$$

On a donc $Z = 1 - 2i$ ou $Z = -1 + 2i$.

(c) $Z^2 = 1 + i\sqrt{3}$

$$|z| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$$
$$X^2 = \frac{|z| + \mathrm{Re}(z)}{2} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$$
$$Y^2 = \frac{|z| - \mathrm{Re}(z)}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$$

On a donc $Z = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ ou $Z = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$.

1.2 Résolution d'une équation du second degré

Proposition 2

Soit a, b et c trois complexes, avec $a \neq 0$. Considérons l'équation :

$$az^2 + bz + c = 0. \quad (E)$$

On note $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

— Si $\Delta \neq 0$, alors en appelant δ une racine carrée de Δ, l'équation (E) admet deux racines distinctes :
$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$$
et
$$z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}.$$

— Si $\Delta = 0$, alors l'équation (E) admet une racine double
$$z_0 = \frac{-b}{2a}.$$

Démonstration :
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) \\ &= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) \end{aligned}$$

— Supposons $\Delta \neq 0$; en notant δ une racine carrée de Δ, on a :

$$az^2 + bz + c = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\delta^2}{4a^2}\right) = a\left(z + \frac{b-\delta}{2a}\right)\left(z + \frac{b+\delta}{2a}\right).$$

L'équation (E) admet donc deux racines distinctes : $-\frac{b+\delta}{2a}$ et $-\frac{b-\delta}{2a}$.

— Supposons $\Delta = 0$; alors $az^2 + bz + c = a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2$ et (E) admet une racine double $z_0 = -\frac{b}{2a}$.

Exercice 2 :

Résoudre les équations suivantes :

(a) $z^2 - 2(2+i)z + 6 + 8i = 0$

(b) $z^2 + z + 1 = 0$

(c) $iz^2 + (4i - 3)z + i - 5 = 0$

(d) $z^2 - \overline{z} + 2 = 0$

Solution:

(a) **Résoudre l'équation** $z^2 - 2(2+i)z + 6 + 8i = 0$.

Étape 1 : Mise sous forme standard

L'équation est déjà sous forme quadratique :

$$z^2 - 2(2+i)z + (6 + 8i) = 0$$

Étape 2 : Identification des coefficients

Identifions les coefficients :

$$a = 1, \quad b = -2(2+i) = -4-2i, \quad c = 6+8i$$

Étape 3 : Calcul du discriminant

Le discriminant est donné par :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Calculons b^2 :

$$b^2 = (-4-2i)^2 = 16 + 16i - 4 = 12 + 16i$$

Calculons $4ac$:

$$4ac = 4 \times 1 \times (6+8i) = 24 + 32i$$

Le discriminant est donc :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (12+16i) - (24+32i) = -12 - 16i$$

Étape 4 : Calcul de $\sqrt{\Delta}$

Nous cherchons les racines carrées de $\Delta = -12 - 16i$. Posons $Z = X + iY$ tel que $Z^2 = \Delta$.

$$\begin{aligned}
|\Delta| &= \sqrt{(-12)^2 + (-16)^2} = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400} = 20 \\
X^2 &= \frac{|z| + \text{Re}(z)}{2} = \frac{20 - 12}{2} = 4 \\
Y^2 &= \frac{|z| - \text{Re}(z)}{2} = \frac{20 + 12}{2} = 16
\end{aligned}$$

et :

$$2XY = -16 \implies XY = -8 \leq 0$$

Les combinaisons possibles sont :

— $X = 2$, $Y = -4$ (car $2 \times (-4) = -8$)
— $X = -2$, $Y = 4$ (car $(-2) \times 4 = -8$)

Les racines carrées de Δ sont donc :

$$\sqrt{\Delta} = Z = X + iY = \begin{cases} 2 - 4i \\ -2 + 4i \end{cases}$$

Étape 5 : Calcul des solutions de l'équation quadratique
La formule de résolution est :

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

Calculons $-b$:

$$-b = -(-4 - 2i) = 4 + 2i$$

Première solution :

$$z_1 = \frac{4 + 2i + (2 - 4i)}{2} = \frac{6 - 2i}{2} = 3 - i$$

Deuxième solution :

$$z_2 = \frac{4 + 2i + (-2 + 4i)}{2} = \frac{2 + 6i}{2} = 1 + 3i$$

Conclusion :
Les solutions de l'équation sont :

$$\boxed{z = 3 - i \quad \text{et} \quad z = 1 + 3i}$$

(b) **Résoudre l'équation** $z^2 + z + 1 = 0$.
Étape 1 : Calcul du discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3$$

Étape 2 : Calcul de $\sqrt{\Delta}$
Nous cherchons $Z = X + iY$ tel que $Z^2 = -3$.

Les racines carrées de Δ sont donc :

$$\sqrt{\Delta} = Z = 0 + iY = \pm i\sqrt{3}$$

Étape 3 : Calcul des solutions de l'équation quadratique

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

Conclusion :
Les solutions sont :

$$\boxed{z = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad z = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}}$$

(c) **Résoudre l'équation** $iz^2 + (4i - 3)z + i - 5 = 0$.
Étape 1 : Mise sous forme standard
Divisons toute l'équation par i :

$$z^2 + (-4 + 3i)z - 1 + 5i = 0$$

Les coefficients sont :

$$a = 1, \quad b = -4 + 3i, \quad c = -1 + 5i$$

Étape 2 : Calcul du discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Calculons b^2 :

$$b^2 = (-4 + 3i)^2 = 7 - 24i$$

Calculons $4ac$:

$$4ac = 4 \times 1 \times (-1 + 5i) = -4 + 20i$$

Le discriminant est :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (7-24i) - (-4+20i) = 11 - 44i$$

Étape 3 : Calcul de $\sqrt{\Delta}$

Nous cherchons $Z = X + iY$ tel que $Z^2 = 11 - 44i$.

$$\begin{aligned} |\Delta| &= \sqrt{11^2 + (-44)^2} = \sqrt{2057} \\ X^2 &= \frac{|z| + \mathrm{Re}(z)}{2} = \frac{\sqrt{2057}+11}{2} \\ Y^2 &= \frac{|z| - \mathrm{Re}(z)}{2} = \frac{\sqrt{2057}-11}{2} \end{aligned}$$

Déterminons les signes :

$$2XY = -44 \implies XY = -22$$

Les racines carrées de Δ sont donc :

$$\sqrt{\Delta} = Z = X + iY = \begin{cases} \sqrt{\frac{\sqrt{2057}+11}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2057}-11}{2}} \\ -\sqrt{\frac{\sqrt{2057}+11}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2057}-11}{2}} \end{cases}$$

Étape 4 : Calcul des solutions de l'équation quadratique

La formule de résolution est :

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

Calculons $-b$:

$$-b = -(-4+3i) = 4 - 3i$$

Les solutions sont donc :

$$z = \frac{4 - 3i \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

Conclusion :
Les solutions sont exprimées en fonction des racines précédentes.

(d) **Résoudre l'équation** $z^2 - \overline{z} + 2 = 0$.

Étape 1 : Écriture en termes de x et y
Posons $z = x + iy$, alors $\overline{z} = x - iy$.
L'équation devient :

$$(x+iy)^2 - (x-iy) + 2 = 0$$

Développons $(x+iy)^2$:

$$(x+iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2$$

L'équation devient :

$$(x^2 - y^2 + 2ixy) - x + iy + 2 = 0$$

Séparons les parties réelles et imaginaires :
Partie réelle :

$$x^2 - y^2 - x + 2 = 0 \quad (1)$$

Partie imaginaire :

$$2xy + y = 0 \quad (2)$$

Étape 2 : Résolution du système
De (2), factorisons y :

$$y(2x+1) = 0$$

Deux cas possibles :
Cas 1 : $y = 0$
Dans ce cas, (1) devient :

$$x^2 - x + 2 = 0$$

Le discriminant est :

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1 - 8 = -7$$

Pas de solution réelle.
Cas 2 : $2x + 1 = 0 \implies x = -\dfrac{1}{2}$
Substituons dans (1) :

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - y^2 - \frac{1}{2} + 2 = 0$$

Calculons :

$$\frac{1}{4} - y^2 - \frac{1}{2} + 2 = 0 \implies -y^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 2 = 0$$

Simplifions :

$$-y^2 + \frac{7}{4} = 0$$

Donc :

$$y^2 = \frac{7}{4} \implies y = \pm\frac{\sqrt{7}}{2}$$

Conclusion :
Les solutions sont :

$$\boxed{z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2} \quad \text{et} \quad z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}}$$

Proposition 3

Soit a, b et c trois complexes, avec $a \neq 0$. Les nombres complexes z_1 et z_2 (éventuellement égaux) vérifient :

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$$

et

$$z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

si, et seulement si, z_1 et z_2 sont les deux racines (éventuellement confondues) de l'équation $az^2 + bz + c = 0$.

Démonstration :

- Si z_1 et z_2 sont les deux racines de l'équation, en utilisant les formules donnant les racines d'une équation du second degré on obtient facilement :

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$$

et

$$z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

- Réciproquement, si $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$, alors :

$$a(z - z_1)(z - z_2) = a\left(z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1 z_2\right) = az^2 + bz + c,$$

et donc l'équation $az^2 + bz + c = 0$ a pour racines z_1 et z_2 (éventuellement égales si $z_1 = z_2$).

Exercice 3 :

Résoudre les équations suivantes :

(a) $z^2 + (1 + a + a^2)z + a(1 + a^2) = 0$

(b) $z^2 - 2z\cos(\theta) + 1 = 0$

Solution:

(a) Cette équation est de la forme quadratique $Az^2 + Bz + C = 0$ avec :

$$A = 1, \quad B = 1 + a + a^2, \quad C = a(1 + a^2).$$

Selon la proposition, les racines z_1 et z_2 vérifient :

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} = -(1 + a + a^2),$$
$$z_1 z_2 = \frac{c}{a} = a(1 + a^2).$$

Les solutions de l'équation se déduisent facilement :

$$\boxed{z = -a \quad \text{et} \quad z = -(a^2 + 1)}.$$

(b) Cette équation est de la forme quadratique $az^2 + bz + c = 0$ avec :

$$a = 1, \quad b = -2\cos(\theta), \quad c = 1.$$

Selon la proposition, les racines z_1 et z_2 vérifient :

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} = 2\cos(\theta),$$
$$z_1 z_2 = \frac{c}{a} = 1.$$

Les solutions de l'équation se déduisent facilement, si l'on considère que $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$:

$$\boxed{z = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \quad \text{et} \quad z = \cos(\theta) - i\sin(\theta)}.$$

Exercice 4 :

On cherche à résoudre l'équation

$$z^3 + (1 + i)z^2 + (i - 1)z - i = 0.$$

(a) Rechercher une solution imaginaire pure ai à l'équation.

(b) Déterminer $b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$z^3 + (1 + i)z^2 + (i - 1)z - i = (z - ai)(z^2 + bz + c).$$

(c) En déduire toutes les solutions de l'équation.

(d) Sur le même modèle, résoudre l'équation

$$z^3 - (2+i)z^2 + 2(1+i)z - 2i = 0.$$

Solution:

(a) ai est solution de l'équation si et seulement si

$$-i + (i-1)ai - (1+i)a^2 - ia^3 = (-a - a^2) + i(-1 - a - a^2 - a^3) = 0.$$

La partie réelle et la partie imaginaire du complexe doivent être nulles, et donc ai est solution de l'équation si et seulement si :

$$\begin{cases} a + a^2 = 0 \\ 1 + a + a^2 + a^3 = 0. \end{cases}$$

La première équation donne $a = 0$ ou $a = -1$, et seul $a = -1$ convient pour la deuxième équation. Donc $-i$ est solution de l'équation.

(b) On cherche b, c tels que

$$z^3 + (1+i)z^2 + (i-1)z - i = (z+i)(z^2 + bz + c).$$

Pour cela, on développe le second membre :

$$(z+i)(z^2 + bz + c) = z^3 + (b+i)z^2 + (ib+c)z + ic.$$

Par identification, on doit avoir :

$$\begin{cases} b + i = 1 + i \\ ib + c = i - 1 \\ ic = -i. \end{cases}$$

On trouve $b = 1$ et $c = -1$, et donc la factorisation :

$$z^3 + (1+i)z^2 + (i-1)z - i = (z+i)(z^2 + z - 1).$$

(c) z est solution de l'équation si et seulement si $z = -i$ ou $z^2 + z - 1 = 0$. Les racines de cette équation sont :

$$z = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad z = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

L'équation admet donc trois solutions, qui sont $-i$, $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

(d) Sur le même modèle, on trouve que les solutions de l'équation $z^3 - (2+i)z^2 + 2(1+i)z - 2i = 0$ sont i, $1+i$ et $1-i$.