Devoir Maison 1

Exercice 1 :

Bac Amérique du nord 2002

Pour tout réel k strictement positif, on considère la fonction f_k définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f_k(x) = \ln(\mathrm{e}^x + kx) - x.$$

Soit $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans le plan muni d'un repère orthogonal , (unités graphiques : 5 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).

Etude préliminaire : mise en place d'une inégalité.

On considère la fonction g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(1 + x) - x.$$

1. Etudier le sens de variation de g.
2. En déduire que pour tout réel a positif ou nul $\ln(1 + a) \leqslant a$.

Partie A : Etude de la fonction f_1 définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f_1(x) = \ln(\mathrm{e}^x + x) - x$.

1. Calculer $f_1'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et en déduire le sens de variation de la fonction f_1.
2. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, $f_1(x) = \ln\left(1 + \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\right)$. En déduire la limite de f_1 en $+\infty$.
3. Dresser le tableau de variation de f_1.

Partie B : Etude et propriétés des fonctions f_k.

1. Calculer $f_k(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et en déduire le sens de variation de la fonction f_k.
2. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$
$f_k(x) = \ln\left(1 + k\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\right)$. En déduire la limite de f_k, en $+\infty$.

3. (a) Dresser le tableau de variation de f_k.
   (b) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, on a $f_k(x) \leqslant \dfrac{k}{\mathrm{e}}$.
4. Déterminer une équation de la tangente T_k à $\mathcal{C}_k$ au point O.
5. Soit p et m deux réels strictement positifs tels que $p < m$.
   Etudier la position relative de $\mathcal{C}_p$ et $\mathcal{C}_m$.
6. Tracer les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ainsi que leurs tangentes respectives T_1 et T_2 en O.

Partie C : Majoration d'une intégrale.

Soit λ un réel strictement positif, on note $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_k$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \lambda$.

1. Sans calculer $\mathcal{A}(\lambda)$, montrer que $\mathcal{A}(\lambda) \leqslant k\displaystyle\int_0^{\lambda} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ (on pourra utiliser le résultat de la question préliminaire).
2. Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\lambda} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.
3. On admet que $\mathcal{A}(\lambda)$ admet une limite en $+\infty$.
   Montrer que $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} \mathcal{A}(\lambda) \leqslant k$.
   Interpréter graphiquement ce résultat

Solution:

$$f_k(x) = \ln\left(\mathrm{e}^x + kx\right) - x; \quad x \geqslant 0.$$

Etude préliminaire : $g(x) = \ln(1+x) - x$; $x \geq 0$

1. La fonction g est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et $g'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = -\dfrac{x}{1+x} \leqslant 0$.
   La fonction g est donc décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.
2.

x	0	$+\infty$
$g(x)$	0 ↘	

: pour tout $a \geqslant 0$, $g(a) \leqslant 0$ ou $\boxed{\ln(1+a) \leqslant a}$

Partie A

1. La fonction f_1' est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et :
$f_1'(x) = \dfrac{e^x+1}{e^x+x} - 1 = \dfrac{1-x}{e^x+x}$ du signe de $1-x$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.
$\boxed{\text{La fonction } f_1 \text{ est donc croissante sur } [0\ ;\ 1] \text{ et décroissante sur } [1\ ;\ +\infty[.}$
2. Pour tout $x \geq 0$,
$f_1(x) = \ln\left[e^x\left(1+\dfrac{x}{e^x}\right)\right] - x = \ln e^x + \ln\left(1+\dfrac{x}{e^x}\right) - x = x + \ln\left(1+\dfrac{x}{e^x}\right) - x$
$\boxed{f_1(x) = \ln\left(1+\dfrac{x}{e^x}\right)}$
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = 0}$
3.

x	0		1		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_1(x)$	0	$\nearrow$	$\ln(e+1)-1$	$\searrow$	0

Partie B

1. La fonction f_k est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et :
$f_k'(x) = \dfrac{e^x+k}{e^x+kx} - 1 = k\dfrac{1-x}{e^x+kx}$ du signe de $1-x$ sur $[0\ ;\ +\infty[$ car $k>0$.
$\boxed{\text{La fonction } f_k \text{ est donc croissante sur } [0\ ;\ 1] \text{ et décroissante sur } [1\ ;\ +\infty[.}$
2. MÃªme calcul que pour f_1 : $\boxed{f_k(x) = \ln\left(1+k\dfrac{x}{e^x}\right)}$ et donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x) = 0}$
3. (a)

x	0		1		$+\infty$
$f_k'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_k(x)$	0	$\nearrow$	$\ln(e+k)-1$	$\searrow$	0

Pour $x \geq 0$, soit $d_k(x) = f_k(x) - \dfrac{k}{e}$

$d'_k(x) = f'_k(x)$: d_k varie comme f_k.

x	0		1		$+\infty$
$d'_k(x)$		$+$	0	$-$	
$d_k(x)$	$-\frac{k}{e}$	$\nearrow$	$d_k(1)$	$\searrow$	$-\frac{k}{e}$

On a $d_k(1) = \ln(e+k) - 1 - \frac{k}{e} = \ln e + \ln\left(1+\frac{k}{\mathrm{e}}\right) - 1 - \frac{k}{e} = \ln\left(1+\frac{k}{\mathrm{e}}\right) - \frac{k}{\mathrm{e}}$

Comme, $\ln(1+a) \leqslant a$ pour tout $a \geqslant 0$, on aura $\ln\left(1+\frac{k}{\mathrm{e}}\right) - \frac{k}{\mathrm{e}} \leqslant 0$.

Donc, pour tout $x \geq 0, d_k(x) \leqslant 0$: $\boxed{f_k(x) \leqslant \frac{k}{\mathrm{e}}}$

4. T_k a pour équation : $y - f_k(0) = f'_k(0)(x-0)$ ou $\boxed{y = kx}$
5. $p < m$,
$$f_m(x) - f_p(x) = \ln(\mathrm{e}^x + mx) - \ln(\mathrm{e}^x + px) = \ln\frac{\mathrm{e}^x + mx}{\mathrm{e}^x + px}$$
On a
$$f_m(x) - f_p(x) \geqslant 0 \iff \frac{e^x + mx}{\mathrm{e}^x + px} \geqslant 1 \iff \mathrm{e}^x + mx \geqslant \mathrm{e}^x + px$$
$$\iff (m-p)x \geqslant 0 \iff x \geqslant 0.$$
Donc, pour $m > p$, $\boxed{C_m \text{ est au-dessus de } C_p}$
6.

Partie C

1. Comme la fonction f_k est intégrable et positive sur $[0\ ;\ \lambda]$, $(0 < \lambda)$:
$A(\lambda) = \int_0^\lambda f_k(x)\ \mathrm{d}x$.
Pour $x \in [0\ ;\ \lambda]$, $k > 0$, $k\frac{x}{\mathrm{e}^x} \geqslant 0$: $\ln\left(1 + k\frac{x}{\mathrm{e}^x}\right) \leqslant k\frac{x}{\mathrm{e}^x}$, donc $f_k(x) \leqslant kx\mathrm{e}^{-x}$.
Les fonctions f_k et $(x \mapsto kx\mathrm{e}^{-x})$ sont intégrables sur $[0\ ;\ \lambda]$ avec $0 < \lambda$, donc :
$\int_0^\lambda f_k(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^\lambda kx\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ soit $\boxed{A(\lambda) \leqslant k\int_0^\lambda x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x}$
2. Posons $\begin{cases} u(x) = x & v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \\ u'(x) = 1 & u(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$

Les fonctions u, u', v, v' sont dérivables sur $[0\ ;\ \lambda]$: on peut intégrer $\int_0^\lambda x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ par parties.

$\int_0^\lambda x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \left[-x\mathrm{e}^{-x}\right]_0^\lambda - \int_0^\lambda -\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = -\lambda\mathrm{e}^{-\lambda} - \left[\mathrm{e}^{-x}\right]_0^\lambda = -\lambda\mathrm{e}^{-\lambda} - \mathrm{e}^{-\lambda} + 1.$

$\boxed{\int_0^\lambda x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = 1 - \lambda\mathrm{e}^{-\lambda} - \mathrm{e}^{-\lambda}.}$

3. Comme on a $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda = 0$, et que $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} = 0$

   $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \int_0^\lambda x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = 1.$

   Donc $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} k\int_0^\lambda xe^{-x}\mathrm{d}x = k$ et par suite $\boxed{\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda) \leqslant k.}$