Trigonométrie

Exercice 1 :

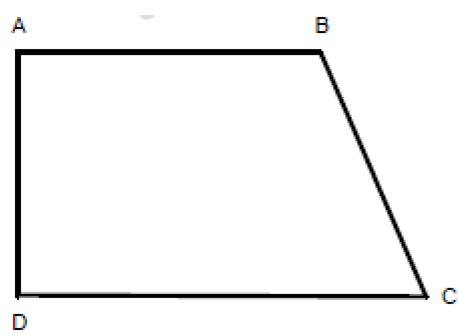
Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 3$ et $\widehat{ABC} = 30°$. Calculer BC et AC.

Solution: Faites un dessin
Le cours nous donne $30° = \frac{\pi}{6}$ rad et $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. On a donc :

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BC = 2\sqrt{3}$$

On retrouve AC grâce au théorème de Pythagore : $AC = \sqrt{3}$

Exercice 2 :



Soit $ABCD$ un trapèze rectangle tel que :

$$AB = 5 \text{ cm}$$
$$AD = 4 \text{ cm}$$
$$\widehat{DCB} = 60°$$

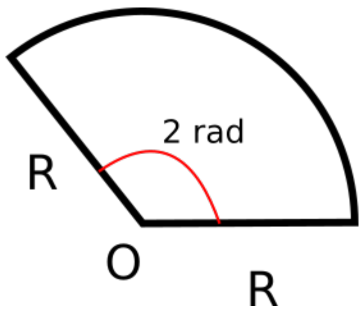
Déterminer les valeurs exactes du périmètre et de l'aire de ce trapèze.

Solution: Faites un dessin
Le cours nous donne $60° = \frac{\pi}{3}$ rad et $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. On a donc :

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{AD}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BC = 8\sqrt{3}$$

On retrouve AC grâce au théorème de Pythagore : $CH = \sqrt{\frac{112}{3}}$. Le périmètre est donc de

Exercice 3 :



Exprimer, en fonction de R, le périmètre de la figure ci dessus.

Solution: cours : La valeur en radians de l'angle correspond à la longueur de l'arc sur le cercle trigonométrique. Pour un cercle de rayon R, il suffit de multiplier cette valeurs par R : Longeur de l'arc : $2R$. A cela, on ajoute la longueur des deux rayons : périmètre : $2R + 2R = 4R$

Exercice 4 :

Soit (C) un cercle de centre A et B un point de (C).

1. Construire les points C, D, E, et F du cercle (C) tels que :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$$
$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{3\pi}{4}$$
$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) = \frac{7\pi}{6}$$
$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}) = -\frac{3\pi}{4}$$

2. Déterminer une mesure puis la mesure principale de chacun des angles orientés suivants :

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE})$$
$$(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF})$$
$$(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AC})$$
$$(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AE})$$

Solution:

1. (figure)
2. La mesure principale d'un angle est la valeur de l'angle dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$.
   (a) $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE})$:
   $$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) = \frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{6} - \frac{2\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$
   La mesure principale est donc $\boxed{\frac{5\pi}{6}}$.
   (b) $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF})$:
   $$(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF}) = -\frac{3\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} = -\frac{6\pi}{4} = -\frac{3\pi}{2} \leq -\pi$$
   La mesure principale dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$ est obtenue en ajoutant 2π :
   $$-\frac{3\pi}{2} + 2\pi = \frac{\pi}{2}$$
   La mesure principale est donc $\boxed{\frac{\pi}{2}}$.
   (c) $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AC})$:
   $$(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{4} = \frac{4\pi}{12} + \frac{9\pi}{12} = \frac{13\pi}{12} \geq \pi$$
   La mesure principale dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$ est obtenue en soustrayant 2π :
   $$\frac{13\pi}{12} - 2\pi = -\frac{11\pi}{12}$$

La mesure principale est donc $\boxed{-\frac{11\pi}{12}}$.

(d) $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AE})$:

$$(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AE}) = \frac{7\pi}{6} - \left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{7\pi}{6} + \frac{3\pi}{4} = \frac{14\pi}{12} + \frac{9\pi}{12} = \frac{23\pi}{12} \geq \pi$$

La mesure principale dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$ est obtenue en soustrayant 2π :

$$\frac{23\pi}{12} - 2\pi = -\frac{\pi}{12}$$

La mesure principale est donc $\boxed{-\frac{\pi}{12}}$.

Exercice 5 :

Pour tout réel x, simplifier l'expression :

$$A(x) = \cos(3\pi - x) + \cos(\frac{\pi}{2} + x) + \sin(-\frac{3\pi}{2} - x)$$

Solution: Soit :

$$\begin{aligned} \cos(3\pi - x) &= \cos(2\pi + \pi - x) \\ &= \cos(\pi - x) \end{aligned}$$

On sait, d'après le cours que $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$.
On sait, d'après le cours que $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin(x)$

$$\begin{aligned} \sin(-\frac{3\pi}{2} - x) &= \sin(-2\pi + \frac{\pi}{2} - x) \\ &= \sin(\frac{\pi}{2} - x) \end{aligned}$$

On sait, d'après le cours que $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$.

En rassemblant les résultats, on trouve :

$$\begin{aligned} A(x) &= \cos(3\pi - x) + \cos(\frac{\pi}{2} + x) + \sin(-\frac{3\pi}{2} - x) \\ &= -\cos(x) - \sin(x) + \cos(x) = -\sin(x) \end{aligned}$$

Exercice 6 :

Démontrer que $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

Solution:

$$\sin(3x) = \sin(2x)\cos(x) + \cos(2x)\sin(x)$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$$

On substitut dans l'expression :

$$\sin(3x) = (2\sin(x)\cos(x))\cos(x) + (1 - 2\sin^2(x))\sin(x)$$

Simplifions chaque terme :

$$\sin(3x) = 2\sin(x)\cos^2(x) + \sin(x) - 2\sin^3(x)$$

On utilise l'identité $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$.
Substituons $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$ dans l'expression :

$$\sin(3x) = 2\sin(x)(1 - \sin^2(x)) + \sin(x) - 2\sin^3(x)$$

Développons :

$$\sin(3x) = 2\sin(x) - 2\sin^3(x) + \sin(x) - 2\sin^3(x)$$

Regroupons les termes similaires :

$$\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$$

Exercice 7 :

Calculer $\sin\theta$,sachant que $\tan\theta = 3\cos\theta$

Solution: Nous savons que :

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

Substituons dans l'équation donnée :

$$\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = 3\cos(\theta)$$

En multipliant chaque côté par $\cos(\theta)$ (en supposant que $\cos(\theta) \neq 0$) :

$$\sin(\theta) = 3\cos^2(\theta)$$

Nous savons que l'identité fondamentale trigonométrique est :

$$\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$$

Cela nous permet d'écrire $\cos^2(\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$:

$$\cos^2(\theta) = 1 - \sin^2(\theta)$$

En substituant cela dans l'expression $\sin(\theta) = 3\cos^2(\theta)$, nous obtenons :

$$\sin(\theta) = 3(1 - \sin^2(\theta))$$

Nous devons maintenant résoudre l'équation :

$$\sin(\theta) = 3(1 - \sin^2(\theta))$$

Développons :

$$\sin(\theta) = 3 - 3\sin^2(\theta)$$

Réarrangeons les termes pour obtenir une équation quadratique :

$$3\sin^2(\theta) + \sin(\theta) - 3 = 0$$

Résolvons cette équation quadratique en utilisant la formule du discriminant. Soit :

$$a = 3, \quad b = 1, \quad c = -3$$

Le discriminant est donné par :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 3 \times (-3) = 1 + 36 = 37$$

Les solutions sont alors :

$$\sin(\theta) = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{37}}{6}$$

Exercice 8 :

Démontrer les relations suivantes :

1. $\cos(x+y)\cos(x-y) = \cos^2 x - \sin^2 y$

2. $\sin(x+y)\cos(x-y) = \sin x \cos x + \sin y \cos y$

3. $\tan x - \tan y = \frac{2\sin(x-y)}{\cos(x+y)+\cos(x-y)}$

Solution:

1. $\cos(x+y)\cos(x-y) = \cos^2(x) - \sin^2(y)$

   Démonstration :

   Utilisons les identités trigonométriques :

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$$

   Multiplions les deux :

$$\cos(x+y)\cos(x-y) = (\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y))(\cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y))$$

   En utilisant le produit de deux binômes conjugués :

$$\cos(x+y)\cos(x-y) = \cos^2(x)\cos^2(y) - \sin^2(x)\sin^2(y)$$

   Donc :

$$\cos(x+y)\cos(x-y) = \cos^2(x) - \sin^2(y)$$

2. $\sin(x+y)\cos(x-y) = \sin(x)\cos(x) + \sin(y)\cos(y)$

   Démonstration :

   Utilisons les identités :

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$$

   Multiplions les deux :

$$\sin(x+y)\cos(x-y) = (\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y))(\cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y))$$

Développons :

$$\sin(x+y)\cos(x-y) = \sin(x)\cos(x)\cos^2(y) + \sin(x)\sin(x)\sin(y)\cos(y) + \cos(x)\cos(x)\sin(y)\cos(y) + \cos(x)\sin(x)\sin^2(y)$$

En regroupant :

$$\sin(x+y)\cos(x-y) = \sin(x)\cos(x) + \sin(y)\cos(y)$$

3. $\tan(x) - \tan(y) = \frac{2\sin(x-y)}{\cos(x+y)+\cos(x-y)}$

Démonstration :

Commençons par le membre de gauche :

$$\tan(x) - \tan(y) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} - \frac{\sin(y)}{\cos(y)}$$

Mettons au même dénominateur :

$$\tan(x) - \tan(y) = \frac{\sin(x)\cos(y) - \sin(y)\cos(x)}{\cos(x)\cos(y)}$$

Utilisons l'identité :

$$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \sin(y)\cos(x)$$

Donc :

$$\tan(x) - \tan(y) = \frac{\sin(x-y)}{\cos(x)\cos(y)}$$

Maintenant, regardons le membre de droite :

$$\frac{2\sin(x-y)}{\cos(x+y)+\cos(x-y)}$$

Utilisons les identités :

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$$

Additionnons les deux :

$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos(x)\cos(y)$$

Substituons :

$$\frac{2\sin(x-y)}{\cos(x+y)+\cos(x-y)}=\frac{2\sin(x-y)}{2\cos(x)\cos(y)}=\frac{\sin(x-y)}{\cos(x)\cos(y)}$$

Ce qui prouve l'identité.

Exercice 9 :

Résoudre les équations suivantes :

1. $\sin(2x)=\sin(x)$
2. $\cos(x)=\sin(3x)$
3. $\sin(x)=-\cos(x)$
4. $\tan(3x-\frac{\pi}{2})=\frac{\sqrt{3}}{3}$
5. $\sin(2x)(\sqrt{3}+2\sin(2x))=0$
6. $\cos^2(x)-\frac{3}{2}\cos(x)+\frac{1}{2}=0$
7. $\cos(2x)-3\cos(x)=-2$
8. $\cos(2x)-\sin(x)=1$
9. $1+\sqrt{3}\sin(2x)-\cos(4x)=0$
10. $\sqrt{3}\tan(x)+4\sin^2(x)=0$
11. $\sin(2x)+\sin(6x)=\sin(4x)$
12. $6\cos(2x)-1=6\tan^2(x)$

Solution: Tip : Utiliser le cercle trigonométrique pour visualiser les résultats
On utilisera les formules du cours :

Proposition 1

— $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$ et $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$

— $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ et $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$

— $\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\sin\theta$ et $\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)=\cos\theta$

— $\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sin\theta$ et $\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos\theta$

1. $\sin(2x) = \sin(x)$
   Solution :
$$\sin(2x) = \sin(x) \Rightarrow 2x = x + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 2x = \pi - x + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$
$$\text{Première équation : } x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$
$$\text{Deuxième équation : } x = \frac{2k+1}{3}\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$
2. $\cos(x) = \sin(3x)$
   Solution :
$$\cos(x) = \sin(3x) \Rightarrow \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$$
   Donc,
$$x = \pm\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$
   Résolution de cette équation donne les solutions possibles.
3. $\sin(x) = -\cos(x)$
   Solution :
$$\sin(x) = -\cos(x) \Rightarrow \tan(x) = -1$$
$$x = \frac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$
4. $\tan\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$
   Solution :
$$\tan\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 3x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$
$$x = \frac{2\pi}{9} + \frac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$$
5. $\sin(2x)(\sqrt{3} + 2\sin(2x)) = 0$
   Solution :
$$\sin(2x) = 0 \quad \text{ou} \quad \sqrt{3} + 2\sin(2x) = 0$$
$$\sin(2x) = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$
$$\sqrt{3} + 2\sin(2x) = 0 \Rightarrow \sin(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$
$$x = \frac{2\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

6. $\cos^2(x) - \frac{3}{2}\cos(x) + \frac{1}{2} = 0$
   Solution : C'est une équation du second degré en $\cos(x)$. Résolvons-la :

$$\Delta = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 4 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4}$$

$$\cos(x) = \frac{\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}}{2} = 1 \quad \text{ou} \quad \cos(x) = \frac{1}{2}$$

$$x = 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

7. $\cos(2x) - 3\cos(x) = -2$
   Solution : Utilisons l'identité $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$:

$$2\cos^2(x) - 1 - 3\cos(x) = -2$$

$$2\cos^2(x) - 3\cos(x) + 1 = 0$$

   On retrouve la même équation qu'à la question précédente, et donc les mêmes solutions.
8. $\cos(2x) - \sin(x) = 1$
   Solution : Utilisons l'identité $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$:

$$1 - 2\sin^2(x) - \sin(x) = 1$$

$$-2\sin^2(x) - \sin(x) = 0$$

   Factorisons :

$$\sin(x)(-2\sin(x) - 1) = 0$$

$$\sin(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \sin(x) = -\frac{1}{2}$$

$$x = k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

9. $1 + \sqrt{3}\sin(2x) - \cos(4x) = 0$
   Solution :
   Utilisons l'identité $\cos(4x) = 2\cos^2(2x) - 1$:

$$1 + \sqrt{3}\sin(2x) - (2\cos^2(2x) - 1) = 0$$

Ce qui simplifie à :

$$\sqrt{3}\sin(2x) + 2 - 2\cos^2(2x) = 0$$

Utilisons l'identité $\cos^2(2x) = 1 - \sin^2(2x)$:

$$\sqrt{3}\sin(2x) + 2 - 2(1 - \sin^2(2x)) = 0$$

$$\sqrt{3}\sin(2x) + 2 - 2 + 2\sin^2(2x) = 0$$

$$\sqrt{3}\sin(2x) + 2\sin^2(2x) = 0$$

Factorisons :

$$\sin(2x)(\sqrt{3} + 2\sin(2x)) = 0$$

Donc, soit $\sin(2x) = 0$, soit $\sqrt{3} + 2\sin(2x) = 0$.

- Si $\sin(2x) = 0$, alors $2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Si $\sqrt{3} + 2\sin(2x) = 0$, alors $\sin(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, ce qui donne :

$$2x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 2x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$$

$$x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{5\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

10. $\sqrt{3}\tan(x) + 4\sin^2(x) = 0$

Solution :

$$\sqrt{3}\tan(x) = -4\sin^2(x)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\cos(x)\sin(x)} = -4$$

$$\cos(x)\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\sin(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ainsi, les solutions de l'équation sont :

$$x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{5\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

11. $\sin(2x) + \sin(6x) = \sin(4x)$

Solution :

Utilisons l'identité :

$$\sin(6x) = \sin(4x)\cos(2x) + \cos(4x)\sin(2x)$$

Substituons cette identité dans l'équation originale :

$$\sin(2x) + (\sin(4x)\cos(2x) + \cos(4x)\sin(2x)) = \sin(4x)$$

Ce qui donne :

$$\sin(2x) + \sin(4x)\cos(2x) + \cos(4x)\sin(2x) = \sin(4x)$$

Utilisons les identités suivantes :

$$\cos(4x) = 2\cos^2(2x) - 1 \quad \text{et} \quad \sin(4x) = 2\sin(2x)\cos(2x)$$

Substituons-les dans l'équation :

$$\sin(2x) + 2\sin(2x)\cos^2(2x) + (2\cos^2(2x) - 1)\sin(2x) = 2\sin(2x)\cos(2x)$$

Regroupons les termes :

$$\sin(2x)\left[1 + 2\cos^2(2x) + (2\cos^2(2x) - 1)\right] = 2\sin(2x)\cos(2x)$$

Simplifions :

$$\sin(2x)\left[4\cos^2(2x)\right] = 2\sin(2x)\cos(2x)$$

Si $\sin(2x) \neq 0$, divisons par $\sin(2x)$ des deux côtés :

$$4\cos^2(2x) = 2\cos(2x)$$

Divisons par 2 :

$$2\cos^2(2x) = \cos(2x)$$

Réarrangeons cette équation :

$$2\cos^2(2x) - \cos(2x) = 0$$

Factorisons :

$$\cos(2x)(2\cos(2x) - 1) = 0$$

Cas 1 : Si $\cos(2x) = 0$, alors :

$$2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

Cas 2 : Si $2\cos(2x) - 1 = 0$, alors :

$$\cos(2x) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Conclusion : Les solutions générales sont :

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \quad \text{ou} \quad x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

12. $6\cos(2x) - 1 = 6\tan^2(x)$

Solution :
Utilisons l'identité $\tan^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{1+\cos(2x)}$:

$$6\cos(2x) - 1 = 6\frac{1-\cos(2x)}{1+\cos(2x)}$$

Multiplions les deux côtés par $1 + \cos(2x)$:

$$(6\cos(2x) - 1)(1 + \cos(2x)) = 6(1 - \cos(2x))$$

Développons les deux côtés :

$$6\cos(2x) + 6\cos^2(2x) - 1 - \cos(2x) = 6 - 6\cos(2x)$$

Réarrangeons les termes :

$$12\cos(2x) + 6\cos^2(2x) = 7$$

Cette équation est une équation quadratique en $\cos(2x)$. Résolvons-la :

$$6\cos^2(2x) + 12\cos(2x) - 7 = 0$$

Le discriminant est :

$$\Delta = 12^2 - 4 \times 6 \times (-7) = 144 + 168 = 312$$

Les solutions sont :

$$\cos(2x) = \frac{-12 \pm \sqrt{312}}{12}$$

Les solutions sont donc non triviales.