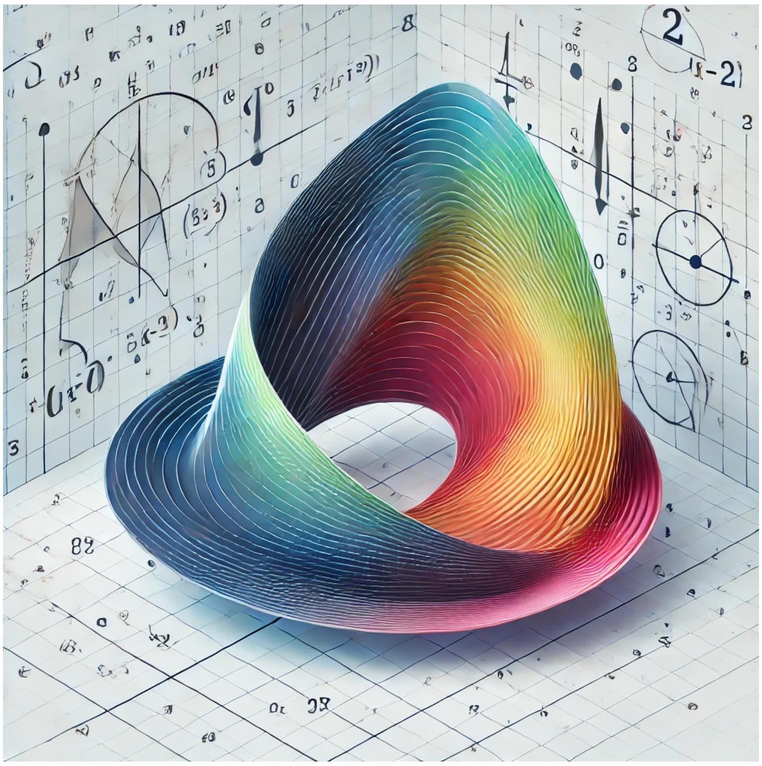
Calcul différentiel

Guillaume Chivot



1 Introduction au calcul différentiel

1.1 Dérivée d'une fonction en un point

Nous rappelons la définition de la dérivée, qui doit être parfaitement connue et assimilée. Nous considérons une fonction $y = f(x)$, où x et y sont des variables réelles. On suppose que x varie dans un intervalle I.

Définition 1

On appelle taux d'accroissement , le rapport

$$T_x(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Définition 2

On dit que f est dérivable au point x si le taux d'accroissement a une limite finie lorsque h tend vers 0 . Cette limite, lorsqu'elle existe, s'appelle la dérivée de f au point x.
La dérivée de f en x se note

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{10.2}$$

Lorsque f est dérivable en tout point de l'intervalle I, on dit que f est dérivable sur I et la fonction $x \mapsto f'(x)$ s'appelle dérivée de f sur I.

Méthode :

Déterminer la dérivée de la fonction $f(x) = x^2$ pour tout x.

Commençons par calculer le taux d'accroissement en x de la fonction f :

$$\begin{aligned} T_x(h) &= \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\ &= 2x + h \end{aligned}$$

La dérivée de f en x est la limite du taux d'accroissement quand h tend vers 0 :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} 2x + h = 2x$$

La fonction $y = f(x)$ est dite deux fois dérivable sur l'intervalle I si elle est dérivable et si sa dérivée f' est dérivable sur I. La dérivée de f' s'appelle la dérivée seconde de f et se note f''. On a donc $f''(x) = [f'(x)]'$.

Exercice 1

Déterminer la dérivée de la fonction $f(x) = x^3$ pour tout x

1.2 dérivées usuelles

Le tableau suivant regroupe une partie des dérivées usuelles.

Fonction f	**Fonction dérivée** f'	**Ensemble de dérivabilité**
$f(x) = k,\ k \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$

Table 1 – Tableau des dérivées usuelles et ensembles de dérivabilité

1.3 interprétation géométrique

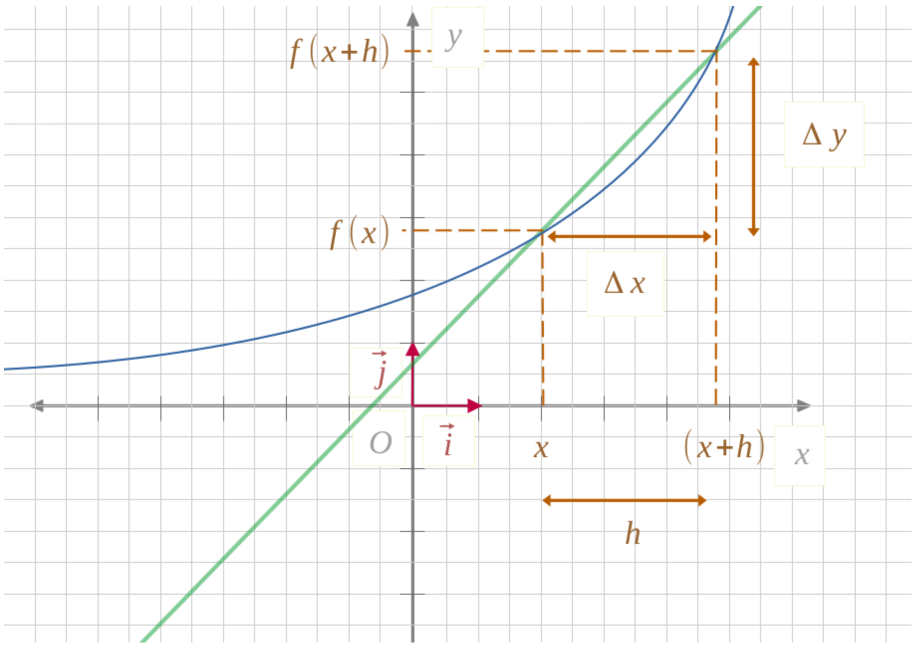


Figure 1 – Définition géométrique de la dérivée

Rappelons l'interprétation géométrique de la dérivée (Figure 1). On sait que le taux d'accroissement $T_x(h) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ représente le coefficient directeur de la droite (AH). Lorsque h tend vers 0, le point H se rapproche de A sur la courbe (C), et la position limite de (AH) est la tangente (T) à la courbe au point A. Dans le même temps, le taux d'accroissement $T_x(h)$ tend vers $f'(x)$. On a donc le résultat fondamental suivant :

Proposition 1

La dérivée $f'(x)$ est égale au coefficient directeur (ou pente) de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x.

En particulier, les points à tangente horizontale sont ceux où la pente est nulle, c'est-à-dire ceux où la dérivée est nulle. C'est le cas, notamment, des fonctions constantes, pour lesquelles $f'(x) = 0$ en tout point.

Proposition 2

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, dérivable sur l'intervalle I. Alors f est constante sur I si, et seulement si, $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$.

Démonstration :
Si f est constante sur I, alors on a bien

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$$

d'après ce qui vient d'être dit. La réciproque est moins évidente et résulte du théorème des accroissements finis. Nous l'admettons dans cette introduction.

Nous rappelons enfin le lien entre dérivabilité et continuité.

Définition 3

On dit que f est continue au point x si

$$\lim_{t \to x} f(t) = f(x). \tag{10.6}$$

Si f est dérivable au point x, alors le taux d'accroissement $T_x(h)$ a une limite finie lorsque $h \to 0$. Ceci implique que son numérateur $f(x+h) - f(x)$ tend vers 0. Sinon, $T_x(h)$ prendrait des valeurs infiniment grandes en valeur absolue au voisinage de $h = 0$ et n'aurait donc pas une limite finie. Donc, si f est dérivable au point x, alors $\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$, c'est-à-dire :

Theorème 1

Si la fonction f est dérivable au point x, alors elle est continue au point x.

La réciproque est fausse : la continuité n'entraîne pas la dérivabilité. On retiendra l'exemple de la fonction valeur absolue (voir figure 2) qui est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

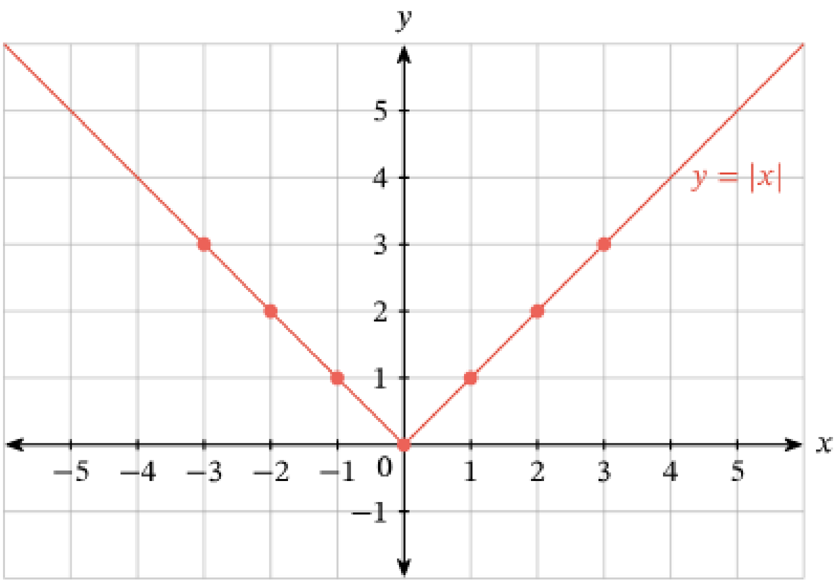


FIGURE 2 – Fonction valeur absolue

1.4 Opérations sur les fonctions dérivables

La définition de la dérivée permet non seulement de calculer les dérivées des fonctions fondamentales, mais aussi de démontrer les règles de calcul qui permettent de calculer les dérivées dans la pratique, car dans la pratique, les fonctions sont rarement "simple".

Proposition 3

Soient u et v deux fonctions dérivables au point x. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors les fonctions $u+v$, λu et uv sont dérivables au point x et

$$\begin{aligned}(u+v)' &= u' + v' \\ (\lambda u)' &= \lambda u' \\ (uv)' &= u'v + uv'.\end{aligned}$$

Démonstration :
Pour l'addition et la multiplication par un réel, la démonstration est immédiate.
Pour le produit de deux fonctions, l'idée est de faire apparaître artificiellement, dans le taux d'accroissement du produit uv, les taux d'accroissements respectifs de u et v. Pour cela, on écrit

$$\begin{aligned}\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x)}{h} &= \frac{u(x+h)v(x+h)-u(x+h)v(x)+u(x+h)v(x)-u(x)v(x)}{h} \\ &= u(x+h)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}+v(x)\frac{u(x+h)-u(x)}{h}.\end{aligned}$$

Les fonctions u et v étant dérivables au point x, on a

$$\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}=u'(x) \quad \text{et} \quad \lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}=v'(x).$$

En outre $u(x)$ est continu au point x, puisqu'elle est dérivable au point x. Par conséquent, $\lim_{h\to 0} u(x+h)=u(x)$. On en déduit que

$$\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x)}{h}=u'(x)v(x)+u(x)v'(x).$$

Ainsi, uv est dérivable et on a $(uv)'=u'v+uv'$.

Proposition 4

Soit u une fonction dérivable au point x, avec $u(x)\neq 0$. Alors la fonction $\frac{1}{u}$ est dérivable au point x et

$$\left(\frac{1}{u}\right)'=\frac{-u'}{u^2}. \tag{10.8}$$

La démonstration sera faite en exercice. Des propositions précédente, on déduit la règle de dérivation d'un quotient :

Proposition 5

Soient u et v deux fonctions dérivables au point x, avec $v(x)\neq 0$. Alors la fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable au point x et

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

Exercice 2

Démontrer la proposition précédente.

Exercice 3

Calculer la dérivée de $tan(x)$

Proposition 6

Considérons I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soient deux fonctions f et g définies par :

$$f : I \to \mathbb{R}, \quad g : J \to \mathbb{R}$$

deux fonctions telles que $f(I) \subset J$. Soit x un point de l'intervalle I. Si f est dérivable au point x et g est dérivable au point $f(x)$, alors la composée $g \circ f$ est dérivable au point x et

$$\forall x \in I, \quad (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

En développant, on obtient :

$$(g \circ f)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h}.$$

En introduisant un terme intermédiaire, cela devient :

$$(g \circ f)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

On décompose les limites :

$$(g \circ f)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Définissons le changement de variable $k = f(x+h) - f(x)$, ce qui implique :

$$k \to 0 \quad \text{lorsque} \quad h \to 0.$$

Ainsi, la première limite devient :

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} = \lim_{k \to 0} \frac{g(f(x)+k) - g(f(x))}{k} = g'(f(x)).$$

La seconde limite est simplement :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

En combinant ces résultats, on obtient :

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Exercice 4

Calculer la dérivée de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{2x^2 - 1}$.

1.5 Notation de Leibniz

On peut présenter autrement la notion de dérivée. Reprenons la notion de taux d'accroissement

$$T_x(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Lorsqu'on passe de x à $x+h$, on donne un accroissement (positif ou négatif) à la variable x.On note cet accroissement Δx, et il est clair que $h = \Delta x$. Alors s'accroît de $\Delta y = f(x+h) - f(x)$. Ainsi la formule qui définit la dérivée comme limite du taux d'accroissement, peut aussi s'écrire

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Lorsque Δx tend vers 0, on dit qu'il devient infinitésimal (ce qui signifie étymologiquement infiniment divisé) : on le note alors dx. Lorsque Δx devient infinitésimal, Δy devient aussi infinitésimal (à condition que f soit continue) : on le note alors dy. Une quantité infinitésimale représente ainsi un accroissement très petit, et surtout aussi petit qu'on veut. La notation infinitésimale contient en elle-même la notion de limite nulle. Ainsi la dérivée s'écrit également

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

C'est la notation de Leibniz, qui exprime la dérivée comme le quotient de deux quantités infinitésimales. La notion d'accroissement infinitésimal est la clé qui permet d'appliquer le calcul différentiel en physique, car elle permet d'étudier les phénomènes *localement.* En outre, la notation de Leibniz permet de mettre en évidence la variable par rapport à laquelle on dérive : dans ce qui précède, y est une variable, fonction d'une autre variable x, et on dérive y par rapport à x.
Remarque 10.2 On peut considérer l'expression $\frac{d}{dx}$ comme un *opérateur de dérivation.* Ainsi la dérivée seconde de $y = f(x)$ est la dérivée de la dérivée et s'écrit

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

On convient de *noter multiplicativement* ces dérivations successives : au numérateur $d \times dy$ se note d^2y, et au dénominateur $dx \times dx$ se note dx^2. D'où la *notation de Leibniz de la dérivée seconde* :

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}. \tag{10.14}$$

Il s'agit là seulement d'une notation, et pas d'un quotient (contrairement à la dérivée première qui est le quotient des accroissements dy et dx).

1.6 Exemple : cas des coordonnées polaires

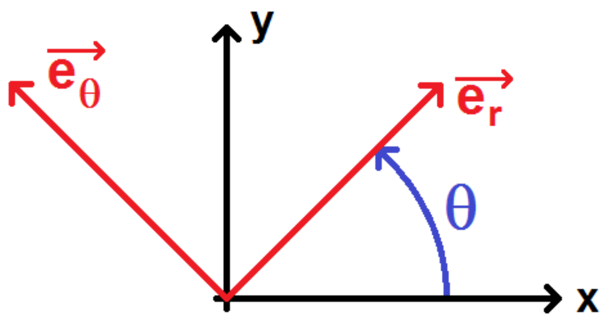


FIGURE 3 – Coordonnées polaires

Soit $M = M(t)$ un point mobile dans le plan. Dans un grand nombre de problèmes, on aura besoin de l'expression de la vitesse et de l'accélération dans la base des coordonnées polaires $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$. Ce qu'il faut bien voir, c'est que cette base est liée au point mobile $M = M(t)$: c'est donc une base mobile, contrairement à la base $B_0 = (\vec{i}, \vec{j})$ qui est fixe. Ainsi $r = r(t)$, $\theta = \theta(t)$, $\vec{e}_r = \vec{e}_r(t)$ et $\vec{e}_\theta = \vec{e}_\theta(t)$ dépendent de t.

Pour trouver les expressions de la vitesse et de l'accélération dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$, nous allons utiliser à fond la notation de Leibniz. On sait d'abord, par le théorème des projections, que

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}_{B_0}, \quad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}_{B_0}. \tag{10.23}$$

En dérivant par rapport à θ, on obtient immédiatement

$$\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}_{B_0} = \vec{e}_\theta, \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = \begin{pmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}_{B_0} = -\vec{e}_r.$$

Pour calculer la vitesse en coordonnées polaires, on dérive par rapport à t le vecteur $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$ en observant qu'il s'agit d'un produit. La formule $(uv)' = u'v + uv'$ restant valable lorsqu'un des termes du produit est un vecteur, il vient

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OM}) = \frac{d}{dt}(r\vec{e}_r) = \dot{r}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt}.$$

Pour calculer la dérivée de $\vec{e}_r$ par rapport à t, on écrit

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\vec{e}_r}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta.$$

D'où l'expression de la vitesse en coordonnées polaires :

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta.$$

Pour calculer l'accélération, on dérive cette expression par rapport à t. On dérive le produit de trois termes par la formule $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$ (Exercice 10.5). On obtient

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{dt}\vec{e}_r + \dot{r}\frac{d\vec{e}_r}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\frac{d\dot{\theta}}{dt}\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}.$$

Or on a,
$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta, \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_r.$$
En remplaçant (faites le calcul en détail !), on obtient
$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta.$$
Les dérivées $\dot{r}, \dot{\theta}, \ddot{r}, \ddot{\theta}$ représentent respectivement la vitesse radiale, la vitesse angulaire, l'accélération radiale et l'accélération angulaire.

Application : Mouvement circulaire

On dit que le mouvement est circulaire lorsque la trajectoire est un cercle de rayon R. On définit le sens positif de circulation sur le cercle comme le sens trigonométrique, et on repère le point $M = M(t)$ par l'angle polaire θ.

Nous pouvons utiliser les formules qui donnent la vitesse et l'accélération en coordonnées polaires. Ici on a
$$r = R = \text{constante} \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = \ddot{r} = 0.$$
Donc, dans le mouvement circulaire de rayon R,
$$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta, \quad \vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta.$$
Dans le cas du mouvement circulaire uniforme , $v = \|\vec{v}\| = R\dot{\theta}$ est une constante, donc $\frac{dv}{dt} = R\ddot{\theta} = 0$ et par conséquent
$$\vec{a} = -\frac{v^2}{R}\vec{e}_\theta.$$
L'accélération est donc centripète , c'est-à-dire dirigée vers le centre du cercle, et a pour module $\frac{v^2}{R}$. On notera par ailleurs que $\omega = \dot{\theta} =$ constante, donc par intégration $\theta = \omega t + \theta_0$. L'abscisse et l'ordonnée du point mobile M sont alors des fonctions sinusoïdales de t.