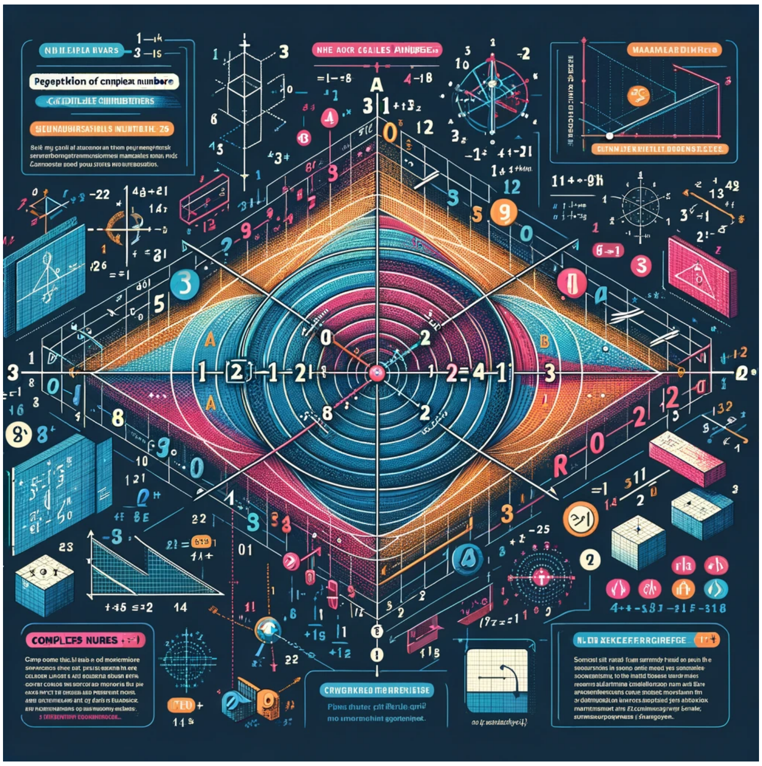
Nombres Complexes

Guillaume Chivot



Introduction

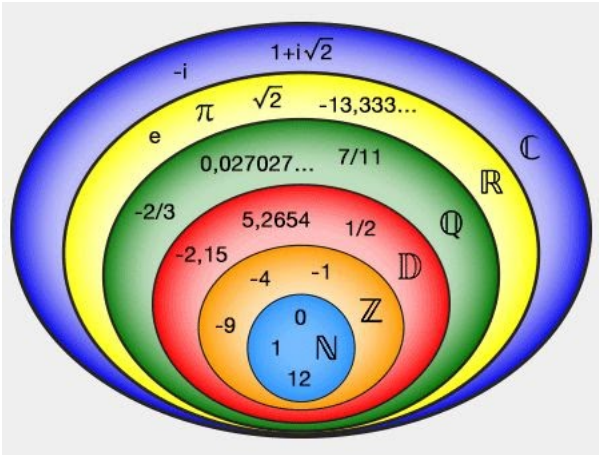


Figure 1 – Ensembles des nombres en mathématiques

En mathématiques, au lycée, nous travaillons avec cinq grands ensembles, qui permettent de manipuler les nombres :

— $\mathbb{N}$ qui regroupe tous les entiers naturels $(0, 1, 12)$.

— $\mathbb{Z}$ qui regroupe tous les entiers relatifs $(-9, -4, -1)$.

— $\mathbb{D}$ qui regroupe tous les décimaux relatifs $(-2.15, 5.2654, \frac{1}{2})$.

— $\mathbb{Q}$ qui regroupe tous les nombre rationnels $(-\frac{2}{3}, 0.027027, \frac{7}{11})$.

— $\mathbb{R}$ qui regroupe tous les nombre réels $(e, \pi, \sqrt{2})$.

Ces ensembles sont mutuellements inclusifs. Cela veut dire que :

— $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$.

— $\mathbb{Z}$ est inclus dans $\mathbb{D}$.

— $\mathbb{D}$ est inclus dans $\mathbb{Q}$.

— $\mathbb{Q}$ est inclus dans $\mathbb{R}$.

que l'on écrit mathématiquement comme :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Par exemple, -2 appartient à la fois à $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$, mais pas à $\mathbb{N}$ à cause de sa valeur négative. Un autre exemple, le nombre π n'appartient qu'à $\mathbb{R}$.

Exercice 1

Classer les nombres suivants dans leurs ensembles : $-\frac{8}{4}$, -25, $\sqrt{49}$, $\frac{8}{2}$, $\frac{5}{3}$, $\sqrt{29}$, $-\frac{10}{17}$, $-\frac{17}{4}$

Dans ce chapitre, nous allons voir un nouvel ensemble que l'on appelle l'ensemble des nombres complexes et que l'on note $\mathbb{C}$. Cet ensemble inclus $\mathbb{R}$, c'est à dire $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Il répond à une problématique insoluble dans $\mathbb{R}$: la racine carrée d'un nombre négatif n'y est pas défini !

$$\sqrt{-a} = \text{impossible} \quad \forall a \in \mathbb{R}_+^*$$

Dans $\mathbb{C}$, nous définissons la racine carrée d'un nombre négatif grâce à l'introduction d'un élément noté i qui vérifie la relation $i^2 = -1$. On a donc

$$\sqrt{-a} = \sqrt{i^2 a} = i\sqrt{a} \quad \forall a \in \mathbb{R}_+^*$$

1 Le corps des nombres complexes

1.1 Définition et représentation dans un plan

Définition 1

Si $z \in \mathbb{C}$, c'est à dire si z est un nombre complexe, il existe un unique couple de réels (a, b) tel que $z = a + ib$. Les réels a et b sont appelés respectivement partie réelle et partie imaginaire du complexe z, et sont notés :

$$a = \text{Re}(z) \qquad \text{et} \qquad b = \text{Im}(z)$$

Il est facile de voir que si la partie imaginaire de z est nul, on retrouve les nombres réels tels qu'on les a vu au lycée. Si la partie réelle de z est nul, on se retrouve avec un complexe de la forme $z = ib$. On appelle ces complexes des complexes imaginaires purs .

Un nombre complexe est donc complétement défini par deux nombres réels. Il est commode de le représenter dans un plan comme dans la figure 2 ci dessus, où l'on représente la partie réelle sur l'axe des abscisse et la partie imaginaire sur l'axe des ordonnées.

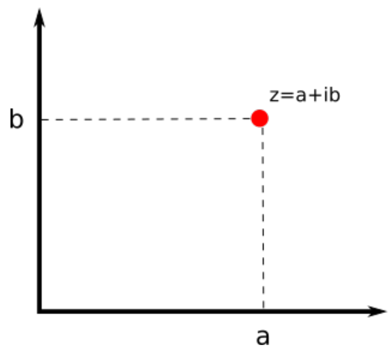


FIGURE 2 – Représentation de l'image du nombre complexe $z = a + ib$ dans un plan

Définition 2

- On appelle image du nombre complexe $z = a + ib$, le point de coordonnée (a,b).
- On appelle affixe d'un point $M|_b^a$, le complexe $z = a + ib$

Exercice 2

Placer sur un plan les points d'affixes :

$$
\begin{aligned}
z_1 &= 2 + 3i \\
z_2 &= 1 + i \\
z_3 &= -5 + 4i
\end{aligned}
$$

1.2 Règle de calcul

L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est muni des lois de l'addition $+$ et de la multiplication $\times$ que l'on retrouve dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Soient $z_1 = a + ib$ et $z_2 = c + id$ deux nombres complexes. Leur somme et leur différence sont définies par :

$$
\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= (a + ib) + (c + id) \\
&= (a + c) + i(b + d) \\
z_1 - z_2 &= (a + ib) - (c + id) \\
&= (a - c) + i(b - d)
\end{aligned}
$$

La multiplication de z_1 et z_2 est définie par :

$$
\begin{aligned}
z_1 \times z_2 &= (a + ib)(c + id) \\
&= ac + iad + ibc + i^2 bd \\
&= ac + iad + ibc - bd \\
&= (ac - bd) + i(ad + bc)
\end{aligned}
$$

Par convention, comme dans $\mathbb{R}$, nous noterons la multiplication de deux complexes comme $z_1.z_2$ ou $z_1 z_2$. La division de z_1 par z_2 est définie par :

$$
\begin{aligned}
\frac{z_2}{z_1} &= \frac{c + id}{a + ib} \\
&= \frac{(c + id)}{(a + ib)} \frac{(a - ib)}{(a - ib)} \\
&= \frac{ac + bd}{a^2 + b^2} + i \frac{ad - bc}{a^2 + b^2}
\end{aligned}
$$

Cette dernière relation permet de définir l'inverse d'un nombre complexe : en posant $z_2 = 1$, c'est à dire $c = 1$ et $d = 0$, on obtient la relation suivante :

$$
\frac{1}{z_1} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i \frac{b}{a^2 + b^2}
$$

Nous avons supposé que le complexe z_1 n'était pas nul.

Exercice 3

Déterminer l'inverse des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 1 + i$$
$$z_2 = 2 + 3i$$
$$z_3 = 4i$$

1.3 Conjugué d'un nombre complexe

Définition 3

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, a et b étant des réels. On appelle conjugué de z le nombre complexe, noté $\overline{z}$, défini par :

$$\overline{z} = a - ib$$

L'image du conjugué d'un nombre complexe est le symétrique de ce nombre complexe par l'axe des abscisse.

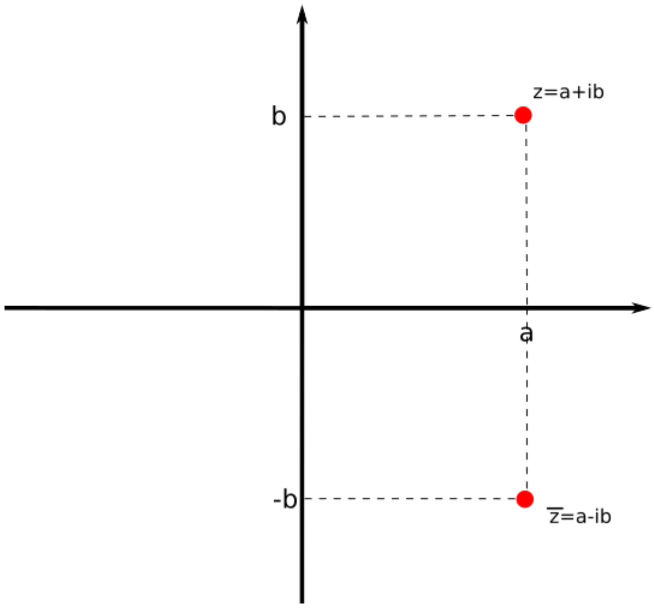


FIGURE 3 – Représentation de l'image du nombre complexe $z = a + ib$ dans un plan et de l'image de son conjugué $\overline{z}$

Proposition 1

Si z est un complexe, on a :

- $\text{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$ et $\text{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.
- $\overline{(\overline{z})} = z$.
- z est réel si, et seulement si, $z = \overline{z}$.
- z est imaginaire pur si, et seulement si, $z = -\overline{z}$.

Démonstration :
Soit un complexe $z = a + ib$

- $$\begin{aligned} \frac{z+\overline{z}}{2} &= \frac{a+ib+a-ib}{2} \\ &= \frac{2a}{2} = \text{Re}(z) \\ \frac{z-\overline{z}}{2i} &= \frac{a+ib-a-ib}{2i} \\ &= \frac{2ib}{2i} = \text{Im}(z) \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \overline{(\overline{z})} = \overline{(\overline{a+ib})} &= \overline{a-ib} \\ &= a+ib = z \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} z = \overline{z} &\Rightarrow a+ib = a-ib \\ &\Rightarrow b = 0 \end{aligned}$$

  Réciproquement, si z est un réel, $b = 0$ et $z = \overline{z}$

- $$\begin{aligned} z = -\overline{z} &\Rightarrow a+ib = -a+ib \\ &\Rightarrow a = 0 \end{aligned}$$

  Réciproquement, si z est un imaginaire pur, $a = 0$ et $z = -\overline{z}$

Proposition 2

— Le conjugué d'une somme de nombres complexes est la somme des conjugués : $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

— Le conjugué d'un produit de nombres complexes est le produit des conjugués : $\overline{z_1.z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$.

— Le conjugué d'un quotient de nombres complexes est la somme le quotient des conjugués : $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

Démonstration :
Soit deux complexes quelconque $z_1 = a + ib$ et $z_2 = c + id$

— Pour l'addition :

$$\begin{aligned}
\overline{z_1 + z_2} &= \overline{a + ib + c + id} \\
&= \overline{a + c + i(b + d)} \\
&= a + c - i(b + d) \\
&= a - ib + c - id \\
&= \overline{z_1} + \overline{z_2}
\end{aligned}$$

— Pour le produit :

$$\begin{aligned}
\overline{z_1.z_2} &= \overline{(a + ib) + (c + id)} \\
&= \overline{ac + iad + ibc + i^2bc} \\
&= \overline{ac - bc + i(ad + bc)} \\
&= ac - bc - i(ad + bc) \\
&= \overline{z_1}.\overline{z_2}
\end{aligned}$$

— Pour le quotien, on se sert de la propriété précédente, en posant $u = \frac{z_1}{z_2}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\overline{z_1} &= \overline{u.z_1} \\
&= \overline{u}.\overline{z_1}
\end{aligned}$$

$$\overline{u} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \Rightarrow \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

Exercice 4

Déterminer les conjugués des complexes suivants :

$$z_1 = 3i - 1$$
$$z_2 = 3i(2 - 4i)$$
$$z_3 = 2i(3i - 2)$$
$$z_4 = \frac{1+i}{2-3i}$$
$$z_5 = \frac{-2+3i}{4+i}$$

1.4 Module d'un nombre complexe

Définition 4

On appelle <u>module</u> d'un nombre complexe z l'élément $|z|$ tel que :

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$$

Proposition 3

Le module d'un nombre complexe $z = a + ib$ est un réel positif tel que $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Démonstration :
Soit un complexe $z = a + ib$, alors :

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{z\bar{z}} \\ &= \sqrt{(a+ib)(a-ib)} \\ &= \sqrt{a^2 - iab + iab - i^2b^2} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

a et b étant deux réels, $a^2 + b^2$ n'est jamais négatif et $|z|$ est un réel positif.

D'un point de vue de la représentation graphique, on voit que la valeur du module $\sqrt{a^2 + b^2}$ représente la distance entre l'origine et l'image M du nombre complexe.

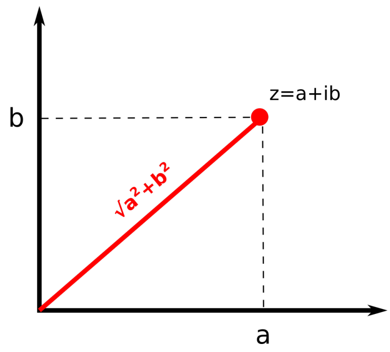


FIGURE 4 – Représentation de l'image du nombre complexe $z = a+ib$ dans un plan avec la mise en valeur de son module $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

Nous allons voir un ensemble de propriétés liées au module d'un nombre complexe.

Proposition 4

pour tout nombre complexe z, on a :

— $|z| = |\overline{z}|$,

— $z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0$,

— $\mathrm{Re}(z) \leq |\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$.

— $\mathrm{Im}(z) \leq |\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$.

Démonstration :
Soit un complexe $z = a + ib$, alors :

— $|\overline{z}| = \sqrt{a^2+b^2} = |z|$,

— $|z| = 0 \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2} = 0 \Rightarrow a = 0$ et $b = 0$. De la même manière, $z = 0 \Rightarrow a = 0$ et $b = 0 \Rightarrow |z| = 0$

— $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ car $|\mathrm{Re}(z)| \leq \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$.

— $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$ car $|\mathrm{Im}(z)| \leq \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$.

Proposition 5

Pour tout nombre complexe z non nul, on a :

— $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

— $|z| = 1$ si, et seulement si, $\frac{1}{z} = \overline{z}$.

Démonstration :
Soit un complexe z, alors :

— On utilise la définition du module $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$:

$$\frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{1}{z}$$

— La deuxième proposition découle durectement du résultat précédent.

Proposition 6: Module d'un produit et d'un quotient

Pour tout nombre complexe z_1 et z_2, on a :

— $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

— $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ avec $z_2 \neq 0$

Démonstration :

— On utilise la propriété des conjugués $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$:

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= \sqrt{z_1 z_2 \overline{z_1}\,\overline{z_2}} \\ &= \sqrt{z_1 \overline{z_1} z_2 \overline{z_2}} \\ &= \sqrt{z_1 \overline{z_1}}\sqrt{z_2 \overline{z_2}} \\ &= |z_1||z_2| \end{aligned}$$

— $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ avec $z_2 \neq 0$

Proposition 7: Inégalités triangulaires

Pour tout nombre complexe z_1 et z_2, on a :

— $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

— $\Big||z_1| - |z_2|\Big| \leq |z_1 - z_2|$

Démonstration :

—

$$\begin{aligned}
|z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2} \\
&= z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1} \\
&= |z_1|^2+|z_2|^2+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1\overline{z_2}} \\
&= |z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) \\
&\leq |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1\overline{z_2}| \\
&\leq |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2| \\
|z_1+z_2|^2 &\leq (|z_1|+|z_2|)^2 \Rightarrow |z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|
\end{aligned}$$

—

$$\begin{aligned}
|z_1| &= |z_1-z_2+z_2| \leq |z_1-z_2|+|z_2| \\
&\Rightarrow |z_1|-|z_2| \leq |z_1-z_2|
\end{aligned}$$

En échangeant les rôles de z_1 et z_2 on arrive au résultat souhaité

1.5 Forme Polaire

Pour comprendre ce qu'est la forme polaire d'un nombre complexe, on va reprendre la figure 4 et la modifié un peu :

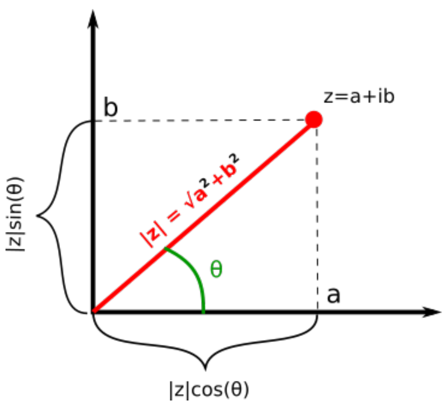


Figure 5 – Représentation de l'image du nombre complexe $z = a + ib$ dans un plan avec la mise en valeur de son module $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ et de ses coordonnées polaires.

On voit qu'un nombre complexe $z = a + ib$ peut être aussi représenté sous la forme : $z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$, où $|z|$ est le module de z. Un nouveau paramètre θ entre donc en jeu. On l'appelle argument de z. On écrira :

Définition 5

Si z est un complexe, il existe un unique couple de réels (r, θ) tel que

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = re^{i\theta}$$

où r est le module du nombre complexe z et θ son argument.

Nous prendrons comme définition et ne chercherons pas à démontrer la forme $\cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta}$. On remarque cependant que $|e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2\theta + \cos^2\theta} = 1$ est un complexe de module unitaire. La partie réelle d'un complexe z se note donc $\mathrm{Re}(z) = |z|\cos(\theta)$ et la partie imaginaire $\mathrm{Im}(z) = |z|\sin(\theta)$

Exercice 5

Ecrire sous forme polaire le conjugué $\overline{z}$ d'un nombre complexe $z = re^{i\theta}$

Proposition 8: Formules d'Euler

Pour $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Exercice 6

Démontrer les formules d'Euler

Proposition 9

On a, pour θ et ϕ réels :

- $e^{i(\theta+\phi)} = e^{i\theta}e^{i\phi}$.
- $e^{i\theta} = e^{i\phi} \Leftrightarrow \theta \equiv \phi \quad [2\pi]$.
- $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$.

Démonstration :
Soit θ et ϕ deux réels :

— $$\begin{aligned} e^{i(\theta+\phi)} &= \cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi) \\ &= \cos(\theta)\cos(\phi) - \sin(\theta)\sin(\phi) + i(\cos(\theta)\sin(\phi) - \sin(\theta)\cos(\phi)) \\ &= \cos(\theta)\left(\cos(\phi) + i\sin(\phi)\right) + i\sin(\theta)\left(\cos(\phi) + i\sin(\phi)\right) \\ &= \left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)\left(\cos(\phi) + i\sin(\phi)\right) \\ &= e^{i\theta}e^{i\phi} \end{aligned}$$

— L'égalité $e^{i\theta} = e^{i\phi}$ équivaut à $(\cos(\theta), \sin(\theta)) = (\cos(\phi), \sin(\phi))$, c'est à dire $\theta \equiv \phi \quad [2\pi]$

— $$\begin{aligned} \frac{1}{e^{i\theta}} &= \frac{1}{\cos(\theta) + i\sin(\theta)} \\ &= \frac{\cos(\theta) - i\sin(\theta)}{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} \\ &= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) \\ &= e^{-i\theta} \end{aligned}$$

Attention :
Si un complexe z s'écrit sous la forme $z = re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, alors on a $|z| = |r|$ où $|r|$ désigne la valeur absolue du réel r car <u>un module est toujours positif</u> . Donc :

— Si $r > 0$, alors $|z| = r$, et un argument de z est θ,
— Si $r < 0$, alors $|z| = -r$, et un argument de z est $\theta + \pi$,
— Si $r = 0$ alors $|z| = 0$, mais z n'a pas d'argument.

1.6 Produit et quotient de deux nombres complexes sous forme trigonométrique

Proposition 10

Soit z_1 et z_2 deux complexes non nuls de formes trigonométriques :

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \qquad \text{et} \qquad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$$

Alors, les formes trigonométriques pour la multiplication et la division sont :

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \qquad \text{et} \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

On en déduit directement les corollaires suivant :

Corollaire 1

Soit z_1 et z_2 deux complexes non nuls :

$$arg(z_1 z_2) \equiv arg(z_1) + arg(z_2) \quad [2\pi]$$
$$arg(\frac{z_1}{z_2}) \equiv arg(z_1) - arg(z_2) \quad [2\pi]$$

Corollaire 2

Soit z un complexe non nul et n un entier relatif :

$$arg(z^n) \equiv narg(z) \quad [2\pi]$$

2 Applications

2.1 Réseaux électriques en régime sinusoïdal et impédance complexe

En régime permanent continu, la différence de potentiel U et l'intensité I entre deux noeud A vers B d'un circuit sont des constantes. Cela implique qu'à tout instant t, le quotient $\frac{U}{I}$ est une constante qui traduit la résistance R du circuit entre A et B.

En régime permanent sinusoïdal, la différence de potentiel entre A et B n'est plus une constante mais varie de façon sinusoïdale $u(t) = U_0 \cos(\omega t + \phi_U)$. Cela implique que le courant circulant entre A et B n'est plus une constante non plus et qu'il varie lui aussi de façon sinusoïdale $i(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi_I)$. Le quotient des valeurs instantanées est alors :

$$\frac{u(t)}{i(t)} = \frac{U_0 \cos(\omega t + \phi_U)}{I_0 \cos(\omega t + \phi_I)}$$

Dans le cas général, nous avons un décalage de phase entre $u(t)$ et $i(t)$, c'est à dire que la différence $\phi_U - \phi_I \neq 0$ et le rapport $\frac{u(t)}{i(t)}$ n'est pas constant. Il varie de $-\infty$ à $+\infty$ et peut même ne pas être définie quand $i(t) = 0$. Il ne nous donne que peu d'information sur le circuit et on ne retrouve pas la notion de résistance du circuit comme en régime permanent continu. Pour remédier à cela, on utilise "un truc" : on écrit le cosinus sous forme complexe. On a alors $\underline{U} = U_0 e^{j(\omega t + \phi_U)}$, et $\underline{I} = I_0 e^{j(\omega t + \phi_I)}$. Notons qu'ici, nous utilisons les notations complexes des electroniciens $z = a + jb$, car la lettre i est dédiée à l'intensité électrique. On met également une barre sous les lettres pour bien faire la différence entre les tensions et intensités réels et leurs formes complexes. Maintenant, en appliquant le quotient

$$\begin{aligned} \frac{\underline{U}}{\underline{I}} &= \frac{U_0 e^{j\omega t + \phi_U}}{I_0 e^{j\omega t + \phi_I}} \\ &= \frac{U_0}{I_0} e^{j(\phi_U - \phi_I)} \end{aligned}$$

on voit que le rapport $\frac{\underline{U}}{\underline{I}}$ est indépendant du temps. C'est un nombre complexe que l'on notera $\underline{Z}$ est qu'on appelle impédance complexe ou simplement impédance.

Cette impédance nous donne deux informations :

— Le module de Z, noté $|Z|$, nous donne le rapport $\frac{U_0}{I_0}$ des amplitudes de la tension appliquée $u(t)$ au courant $i(t)$.

— L'argument de Z donne la différence de phase $\phi_U - \phi_I$, c'est-à-dire le déphasage de la tension $u(t)$ sur le courant $i(t)$.

Avec cette notation, on peut écrire $\underline{U} = Z\underline{I}$, relation qui traduit la loi d'Ohm en régime sinusoïdal. Ainsi, on peut montrer (voir cours analyse de circuits) que toutes les méthodes de résolution de circuits vues en régime continu (diviseur de tension, lois de Kirchhoff, théorème de Thévenin, etc...) sont encore applicables en régime sinusoïdal, à condition de travailler avec les impédances complexes. Nous allons voir un exemple :

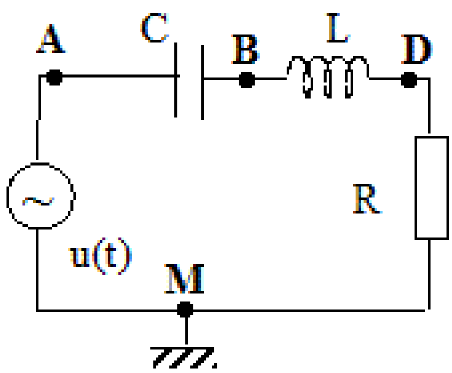


FIGURE 6 – Circuit composé d'un générateur en régime sinusoïdal, d'une bobine, d'un condensateur et d'une résistance.

Le circuit ci-dessus est constitué d'un générateur qui délivre une tension sinusoïdale $u(t) = U_0 \cos(\omega t)$, d'une bobine d'induction L, d'un condensateur de capacité C et d'une résistance R. On cherche l'intensité sinusoïdale $i(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi)$ associée. On commence par écrire $u(t)$ et

$i(t)$ sous forme complexe

$$\underline{U} = U_0 e^{j\omega t} \qquad \text{et} \qquad \underline{I} = I_0 e^{j\omega t + \phi}$$

On écrit ensuite les relations entre $u(t)$ et $i(t)$ pour chacun des dipoles présents et on transpose ces relations aux valeurs complexes (voir cours analyse de circuit) :

- Pour le condensateur : $i(t) = C\dfrac{du(t)}{dt} \Leftrightarrow \underline{I} = Cj\omega\underline{U}$ et donc $Z_C = \dfrac{1}{Cj\omega}$.
- Pour la bobine : $u(t) = L\dfrac{di(t)}{dt} \Leftrightarrow \underline{I} = Lj\omega\underline{U}$ et donc $Z_L = Lj\omega$.
- Pour la résistance : $u(t) = Ri(t) \Leftrightarrow \underline{U} = R\underline{I}$ et donc $Z_R = R$.

Comme tous ces élements sont en série, il suffit d'additionner les impédances pour obtenir l'impédance totale :

$$\begin{aligned} Z &= Z_R + Z_L + Z_C \\ &= R + Lj\omega + \frac{1}{Cj\omega} \\ &= R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) \end{aligned}$$

On obtient donc deux résultats exploitables :

- Le module $|Z|$ nous donne le rapport $\frac{U_0}{I_0}$, donc :

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{U_0}{|Z|} \\ &= \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \end{aligned}$$

- Le déphasage $\phi_U - \phi_I$, avec $\phi_U = 0$ et $\phi_I = \phi$ dans notre exemple, est donné par :

$$\tan(-\phi) = -\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \Rightarrow \phi = \arctan\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right)$$

Nous avons utiliser ici le fait que la fonction tangente est une fonction impaire, c'est à dire que $\tan(-\phi) = -\tan(\phi)$.

On voit donc que I_0 et ϕ sont des fonction de la fréquence de notre système $f = \frac{\omega}{2\pi}$ que l'on peut étudier mathématiquement et expérimentalement (en TP).

Exercice 7

Etudier les variations de la fonction $I_0(\omega)$ pour $\omega \in]0, +\infty[$

Exercice 8

Donner ω_0 pour laquel le déphasage est nul. Que se passe-t-il si $\omega > \omega_0$? Et si $\omega < \omega_0$?

Pour illustrer les calculs précédents, on représente ci dessous, sur la figure (7), les courbes de I_0 et ϕ en fonction de la fréquence pour $U_0 = 1V$, $R = 20\Omega$, $C = 6.8\mu F$ et $L = 100mH$.

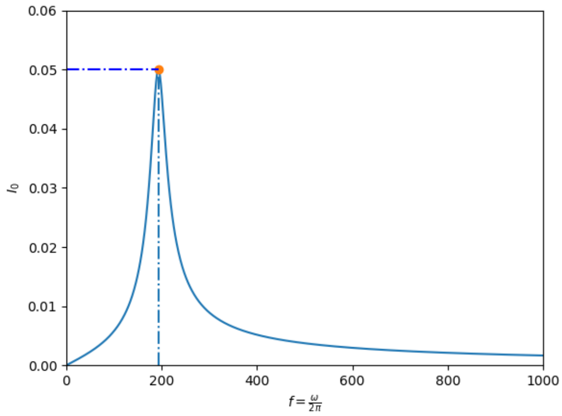


FIGURE 7 – Courbe de I_0 en fonction de la fréquence f. Le point rouge représente le maximum.

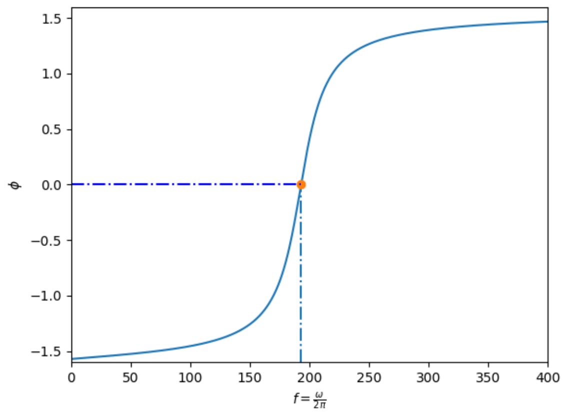


FIGURE 8 – Courbe de ϕ en fonction de la fréquence f. Le point rouge représente la fréquence pour laquelle le déphasage est nul.

Appendices

1 Codes python des figures

Code de la figure (7)

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt


U0 = 1. # en volt
R = 20. # en ohm
C = 6.8e-6 # en faraday
L = 0.1 # en henry

x = np.linspace(0.0001, 1000, 1000)
y = U0/np.sqrt(R**2 + ( L*x*2*np.pi - (1/(C*x*2*np.pi)))**2)


plt.plot(x, y)

max_x = [1/((2*np.pi)*np.sqrt(L*C))]
max_y = [U0/R]

plt.stem(max_x,max_y, '-.')
plt.hlines(max_y, 0, max_x, color='blue', linestyle='-.')

plt.xlim(0,1000)
plt.ylim(0,0.06)

plt.xlabel(r"$f=\frac{\omega}{2\pi}$")
plt.ylabel(r"$I_0$")

plt.show()
```

Code de la figure (8)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt


R = 20. # en ohm
C = 6.8e-6 # en faraday
L = 0.1 # en henry

x = np.linspace(0.0001, 400, 1000)
y = np.arctan( (L*x*2*np.pi - (1/(C*x*2*np.pi)))/R)


plt.plot(x, y)

max_x = [1/((2*np.pi)*np.sqrt(L*C))]
max_y = [0]

plt.stem(max_x,max_y, '-.', bottom=-1.6)
plt.hlines(max_y, 0, max_x, color='blue', linestyle='-.')

plt.xlim(0,400)
plt.ylim(-1.6,1.6)

plt.xlabel(r"$f=\frac{\omega}{2\pi}$")
plt.ylabel(r"$\phi$")

plt.show()
```