# Rappels Mathématiques

**Exercice 1 :**

Écrire sous la forme d'une fraction irréductible :

1. $A = \frac{4}{3} \times \frac{7}{5}$
2. $B = \frac{2}{5} \times \frac{5}{9}$
3. $C = \frac{7}{8} \times \frac{6}{5}$
4. $D = \frac{-2}{5} \times \frac{3}{-7} \times \frac{-7}{2}$
5. $E = 7 \times \frac{1}{11} \times \frac{3}{14}$
6. $F = \frac{6}{35} \times \frac{14}{3} \times \frac{1}{2}$
7. $G = \frac{51}{26} \times \frac{49}{15} \times \frac{65}{119}$

**Solution:**

1. $A = \frac{4}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{4 \times 7}{3 \times 5} = \frac{28}{15}$
2. $B = \frac{2}{5} \times \frac{5}{9} = \frac{2 \times 5}{5 \times 9} = \frac{2}{9}$
3. $C = \frac{7}{8} \times \frac{6}{5} = \frac{7 \times 6}{8 \times 5} = \frac{21}{20}$
4. $D = \frac{-2}{5} \times \frac{3}{-7} \times \frac{-7}{2} = \frac{-2 \times 3 \times -7}{5 \times -7 \times 2} = \frac{3}{5}$
5. $E = 7 \times \frac{1}{11} \times \frac{3}{14} = \frac{7 \times 3}{11 \times 14} = \frac{3}{22}$
6. $F = \frac{6}{35} \times \frac{14}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{6 \times 14 \times 1}{35 \times 3 \times 2} = \frac{2}{5}$
7. $G = \frac{51}{26} \times \frac{49}{15} \times \frac{65}{119} = \frac{3 \times 17}{13 \times 2} \times \frac{7 \times 7}{15} \times \frac{2 \times 2 \times 15}{7 \times 17} = \frac{3 \times 7 \times 2}{13}$

**Exercice 2 :**

Écrire sous la forme d'une fraction irréductible :

1. $A = \frac{2}{3} \div \frac{5}{7}$
2. $B = \frac{1}{3} \div 5$
3. $C = -4 \div \frac{-2}{13}$
4. $D = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}}$
5. $E = \frac{\frac{3}{7}}{2}$
6. $F = -\frac{\frac{-12}{49}}{\frac{-3}{-35}}$

**Solution:**

1. $A = \frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$
2. $B = \frac{1}{3} \div 5 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$
3. $C = -4 \div \frac{-2}{13} = -4 \times \frac{13}{-2} = 26$
4. $D = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$
5. $E = \frac{\frac{3}{7}}{2} = \frac{3}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{14}$
6. $F = -\frac{\frac{-12}{49}}{\frac{-3}{-35}} = -\frac{-12}{49} \times \frac{-35}{-3} = \frac{-12\times-35}{49\times-3} = -\frac{20}{7}$

**Exercice 3 :**

Écrire sous la forme d'une fraction, la plus simple possible :

1. $A = \frac{\frac{b^2}{a^5}}{\frac{a^7}{b^3}}$
2. $B = \frac{\frac{a^2}{b^5}}{\frac{a^7}{b^3}}$
3. $C = \frac{\frac{a^3}{b^2} \times \frac{3a^2}{b} \times \frac{b^7}{2a^4}}{1}$

**Solution:**

1. $A = \frac{\frac{b^2}{a^5}}{\frac{a^7}{b^3}} = \frac{b^2}{a^5} \times \frac{b^3}{a^7} = \frac{b^{2+3}}{a^{5+7}} = \frac{b^5}{a^{12}}$
2. $B = \frac{\frac{a^2}{b^5}}{\frac{a^7}{b^3}} = \frac{a^2}{b^5} \times \frac{b^3}{a^7} = \frac{a^{2-7}}{b^{5-3}} = \frac{a^{-5}}{b^2} = \frac{1}{a^5 b^2}$
3. $C = \frac{\frac{a^3}{b^2} \times \frac{3a^2}{b} \times \frac{b^7}{2a^4}}{1} = \frac{a^3 \times 3a^2 \times b^7}{b^2 \times b \times 2a^4} = \frac{3a^{3+2}b^7}{2a^4 b^{2+1}} = \frac{3a^5 b^7}{2a^4 b^3} = \frac{3a^{5-4}b^{7-3}}{2} = \frac{3ab^4}{2}$

**Exercice 4 :**

Écrire sous la forme d'une fraction irréductible :

1. $A = \frac{8}{12}$
2. $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$
3. $C = \frac{2}{3} + \frac{5}{6}$
4. $D = \frac{2}{5} - 1$
5. $E = \frac{5}{4} - \frac{7}{6}$
6. $F = \frac{1}{15} + \frac{1}{3} - \frac{3}{20}$

**Solution:**

1. $A = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$
2. $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$
3. $C = \frac{2}{3} + \frac{5}{6} = \frac{4}{6} + \frac{5}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$
4. $D = \frac{2}{5} - 1 = \frac{2}{5} - \frac{5}{5} = \frac{-3}{5}$
5. $E = \frac{5}{4} - \frac{7}{6} = \frac{15}{12} - \frac{14}{12} = \frac{1}{12}$
6. $F = \frac{1}{15} + \frac{1}{3} - \frac{3}{20} = \frac{4}{60} + \frac{20}{60} - \frac{9}{60} = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}$

**Exercice 5 :**

Écrire sous la forme d'une fraction irréductible :

1. $A = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} \times \frac{2}{5}$
2. $B = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2}}$
3. $C = \left(\frac{7}{3}\right)^2 - \frac{11}{4}$
4. $D = \frac{1+\frac{1}{7}}{1+\frac{1}{3}}$
5. $E = \frac{-3}{5} \times \frac{5}{-6} \times \frac{13}{1}$
6. $F = \frac{4}{2+\frac{1}{3}} - \frac{5}{6}$
7. $G = \frac{5}{7} + \left(\frac{\frac{3}{2}}{2}\right)$
8. $H = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}$
9. $I = \frac{\frac{7}{-6} \times \frac{3}{-10} \times \frac{-14}{5}}{\frac{1}{-5}}$

**Solution:**

1. $A = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{3} - \frac{8}{15} = \frac{10}{15} - \frac{8}{15} = \frac{2}{15}$
2. $B = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$
3. $C = \left(\frac{7}{3}\right)^2 - \frac{11}{4} = \frac{49}{9} - \frac{11}{4} = \frac{196}{36} - \frac{99}{36} = \frac{97}{36}$
4. $D = \frac{1+\frac{1}{7}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{8}{7}}{\frac{4}{3}} = \frac{8}{7} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{7}$
5. $E = \frac{-3}{5} \times \frac{5}{-6} \times \frac{13}{1} = \frac{13}{10}$
6. $F = \frac{4}{2+\frac{1}{3}} - \frac{5}{6} = \frac{4}{\frac{7}{3}} - \frac{5}{6} = \frac{12}{7} - \frac{5}{6} = \frac{72}{42} - \frac{35}{42} = \frac{37}{42}$
7. $G = \frac{5}{7} + \left(\frac{\frac{3}{2}}{2}\right) = \frac{5}{7} + \frac{3}{4} = \frac{20}{28} + \frac{21}{28} = \frac{41}{28}$

8. $H = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{5}{10}+\frac{2}{10}}{\frac{4}{12}-\frac{3}{12}} = \frac{\frac{7}{10}}{\frac{1}{12}} = \frac{7}{10} \times \frac{12}{1} = \frac{42}{5}$
9. $I = \frac{\frac{7}{-6}\times\frac{3}{-10}\times\frac{-14}{5}}{\frac{1}{-5}} = \frac{\frac{7\times3\times-14}{-6\times-10\times5}}{\frac{1}{-5}} = \frac{294}{300} \times 5 = \frac{49}{10}$

**Exercice 6 :**

Écrire sous la forme d'une fraction, la plus simple possible :

1. $A = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$
2. $B = \frac{3}{2a} + \frac{5}{b}$
3. $C = \frac{3}{2a} - \frac{1}{ab}$
4. $D = \frac{1}{2a} + \frac{1}{6a} + \frac{1}{15a}$
5. $E = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3}$
6. $F = \frac{2}{ab} + \frac{3}{a^2} + \frac{4}{b^2}$

**Solution:**

1. $A = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{b}{ab} + \frac{a}{ab} = \frac{a+b}{ab}$
2. $B = \frac{3}{2a} + \frac{5}{b} = \frac{3b}{2ab} + \frac{10a}{2ab} = \frac{3b+10a}{2ab}$
3. $C = \frac{3}{2a} - \frac{1}{ab} = \frac{3b}{2ab} - \frac{2}{2ab} = \frac{3b-2}{2ab}$
4. $D = \frac{1}{2a} + \frac{1}{6a} + \frac{1}{15a} = \frac{15+5+2}{30a} = \frac{22}{30a} = \frac{11}{15a}$
5. $E = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} = \frac{a^2}{a^3} + \frac{a}{a^3} + \frac{1}{a^3} = \frac{a^2+a+1}{a^3}$
6. $F = \frac{2}{ab} + \frac{3}{a^2} + \frac{4}{b^2} = \frac{2ab}{a^2b^2} + \frac{3b^2}{a^2b^2} + \frac{4a^2}{b^2a^2} = \frac{2ab+3b^2+4a^2}{b^2a^2}$

**Exercice 7 :**

Calculer sans la calculatrice, en justifiant votre résultat, les puissances suivantes :

$$2^3, \quad 0^{14}, \quad (-2)^3, \quad (-1)^{10}, \quad (-1)^{13}$$

**Solution:**

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

$$0^{14} = 0$$

$$(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$$

$$(-1)^{10} = (-1) \times (-1) \times \cdots \times (-1) = 1$$

$$(-1)^{13} = (-1) \times (-1) \times \cdots \times (-1) = -1$$

**Exercice 8 :**

Transformer l'écriture en une seule puissance en utilisant la règle « produit de deux puissances » :

$$3^2 \times 3^8, \quad 4 \times 4^2, \quad (-9)^3 \times (-9)^2 \times (-9)$$

**Solution:**

$$3^2 \times 3^8 = 3^{2+8} = 3^{10}$$

$$4 \times 4^2 = 4^1 \times 4^2 = 4^{1+2} = 4^3$$

$$(-9)^3 \times (-9)^2 \times (-9) = (-9)^3 \times (-9)^2 \times (-9)^1 = (-9)^{3+2+1} = (-9)^6 = 9^6$$

**Exercice 9 :**

Transformer l'écriture en une seule puissance en utilisant la règle « puissance d'une puissance » :

$$\left((-3)^2\right)^2, \quad \left((-2)^3\right)^2, \quad \left((-5)^3\right)^2, \quad \left((7)^5\right)^2$$

**Solution:**

$$\left((-3)^2\right)^2 = (-3)^{2\times 2} = (-3)^4 = 3^4 =$$

$$\left((-2)^3\right)^2 = (-2)^{3\times 2} = (-2)^6 = 2^6$$

$$\left((-5)^3\right)^2 = (-5)^{3\times 2} = (-5)^6 = 5^6$$

$$\left(7^5\right)^2 = 7^{5\times 2} = 7^{10}$$

**Exercice 10 :**

Transformer l'écriture en une seule puissance en utilisant la règle « quotient de deux puissances » :

$$\frac{3^5}{3^2}, \quad \frac{(-5)^4}{(-5)^2}, \quad \frac{(-4)^2}{(-4)^4}$$

**Solution:**

$$\frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3$$

$$\frac{(-5)^4}{(-5)^2} = (-5)^{4-2} = (-5)^2 = 5^2$$

$$\frac{(-4)^2}{(-4)^4} = (-4)^{2-4} = (-4)^{-2} = \frac{1}{(-4)^2} = \frac{1}{16}$$

**Exercice 11 :**

Simplifier puis calculer les expressions suivantes :

$$A = \left(7^{-24} \times 7^{-26} \times 7^{51}\right)^2$$

$$B = \left(5^{-4} \times 5^5\right)^3$$

$$C = (2 \times 3)^5 \times 3^{-3} \times 2 \times 2^{-4} \times 3^{-1}$$

$$D = \frac{2^5 \times 3^8}{3^5 \times 2^3}$$

$$E = \frac{5^{12} \times 10^{-3} \times 3^8}{10^{-5} \times 3^8 \times 5^{10}}$$

$$F = 8 \times \left(\frac{7 \times 5}{3}\right)^5 \frac{5^2 \times 7^3}{7^4 \times 5^5} \times \left(7^{-2}\right)^2$$

**Solution:**

$$A = \left(7^{-24} \times 7^{-26} \times 7^{51}\right)^2 = \left(7^{-24-26+51}\right)^2 = \left(7^1\right)^2 = 7^2 = 49$$

$$B = \left(5^{-4} \times 5^5\right)^3 = \left(5^{-4+5}\right)^3 = \left(5^1\right)^3 = 5^3 = 125$$

$$C = (2\times 3)^5 \times 3^{-3} \times 2 \times 2^{-4} \times 3^{-1} = (2^5 \times 3^5) \times 3^{-3} \times 2 \times 2^{-4} \times 3^{-1}$$
$$= 2^{5+1-4} \times 3^{5-3-1} = 2^2 \times 3^1 = 4 \times 3 = 12$$

$$D = \frac{2^5 \times 3^8}{3^5 \times 2^3} = 2^{5-3} \times 3^{8-5} = 2^2 \times 3^3 = 4 \times 27 = 108$$

$$E = \frac{5^{12} \times 10^{-3} \times 3^8}{10^{-5} \times 3^8 \times 5^{10}} = \frac{5^{12} \times 10^{-3}}{10^{-5} \times 5^{10}} = 5^{12-10} \times 10^{-3+5} = 5^2 \times 10^2 = 25 \times 100 = 2500$$

$$F = 8 \times \left(\frac{7\times 5}{3}\right)^5 \times \frac{5^2 \times 7^3}{7^4 \times 5^5} \times \left(7^{-2}\right)^2$$
$$= 8 \times \frac{(7^5 \times 5^5}{3^5} \times \frac{5^2 \times 7^3}{7^4 \times 5^5} \times \frac{1}{7^{-4}}$$
$$= \frac{8 \times 5^2}{3^5}$$
$$= \frac{8 \times 25}{243} = \frac{200}{243}$$

**Exercice 12 :**

Simplifier les expressions :

a) $e^{\ln(2)}$
b) $e^{-\ln(3)}$
c) $e^{2\ln(5)}$
d) $e^{\frac{1}{2}\ln(16)}$
e) $\ln(e^3)$
f) $\ln(e^{-4})$
g) $\ln(\sqrt{e})$
h) $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}}\right)$
i) $e^3 e^5$
j) $e^{-5}e^3e^2$
k) $(e^{-3})^2$
l) $\frac{1}{e^7}$

m) $\frac{1}{e^{-x+2}}$
n) $e^{-x+3}e^{2x+2}$
p) $\frac{e^{3x+2}}{e^{2x+3}}$
q) $(e^{-2x+3})^2$

**Solution:**

a) $e^{\ln(2)} = 2$
b) $e^{-\ln(3)} = \frac{1}{3}$
c) $e^{2\ln(5)} = 5^2 = 25$
d) $e^{\frac{1}{2}\ln(16)} = 16^{\frac{1}{2}} = 4$
e) $\ln(e^3) = 3$
f) $\ln(e^{-4}) = -4$
g) $\ln(\sqrt{e}) = \ln(e^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}$
h) $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}}\right) = \ln(e^{-\frac{3}{2}}) = -\frac{3}{2}$
i) $e^3e^5 = e^{3+5} = e^8$
j) $e^{-5}e^3e^2 = e^{-5+3+2} = e^0 = 1$
k) $(e^{-3})^2 = e^{-6}$
l) $\frac{1}{e^7} = e^{-7}$
m) $\frac{1}{e^{-x+2}} = e^{x-2}$
n) $e^{-x+3}e^{2x+2} = e^{-x+3+2x+2} = e^{x+5}$
p) $\frac{e^{3x+2}}{e^{2x+3}} = e^{(3x+2)-(2x+3)} = e^{x-1}$
q) $(e^{-2x+3})^2 = e^{-4x+6}$

**Exercice 13 :**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $e^x = 3$
b) $e^x + 1 = 0$
c) $e^{x+3} = 1$
d) $\ln(x) = 6$
e) $\ln(x) = -2$
f) $\ln(x + 2) = 5$

**Solution:**

a) $e^x = 3$

$$x = \ln(3)$$

b) $e^x + 1 = 0$

$$e^x = -1 \quad \text{(impossible car } e^x > 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R})$$

$$\text{Aucune solution dans } \mathbb{R}$$

c) $e^{x+3} = 1$

$$e^{x+3} = e^0 \quad \Leftrightarrow \quad x + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -3$$

d) $\ln(x) = 6$

$$x = e^6$$

e) $\ln(x) = -2$

$$x = e^{-2}$$

f) $\ln(x + 2) = 5$

$$x + 2 = e^5 \quad \Rightarrow \quad x = e^5 - 2$$

**Exercice 14 :**

Résoudre :

a) $e^{2x+1} = 3$
b) $e^{-3x+2} = 0$
c) $e^{2x+1} = e^{-x-1}$
d) $\frac{e^{3x-2}}{e^{2x+5}} = 1$
e) $e^{x^2+5x-5} = e$
f) $e^{6x-1} = 5$
g) $e^{3x} - 2 > 1$
h) $\frac{e^{5x+2}}{e^{-3x+6}} > 0$
i) $\frac{e^{5x+2}}{e^{-3x+6}} > 6$

**Solution:**

a) $e^{2x+1} = 3$

$$e^{2x+1} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 1 = \ln(3) \quad \Leftrightarrow \quad 2x = \ln(3) - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\ln(3) - 1}{2}$$

b) $e^{-3x+2} = 0$

$$e^{-3x+2} = 0 \quad \text{(impossible, car } e^y > 0 \text{ pour tout } y \in \mathbb{R}\text{)}$$

Aucune solution dans $\mathbb{R}$

c) $e^{2x+1} = e^{-x-1}$

$$2x + 1 = -x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + x = -1 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3x = -2 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{2}{3}$$

d) $\frac{e^{3x-2}}{e^{2x+5}} = 1$

$$e^{(3x-2)-(2x+5)} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{x-7} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x - 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 7$$

e) $e^{x^2+5x-5} = e$

$$x^2 + 5x - 5 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 5x - 6 = 0$$

Résolvons avec la formule du discriminant : $\Delta = 5^2 - 4(1)(-6) = 25 + 24 = 49$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-5 \pm 7}{2}$$

$$x_1 = \frac{-5+7}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{-5-7}{2} = -6$$

Donc, les solutions sont $x = 1$ et $x = -6$

f) $e^{6x-1} = 5$

$$6x - 1 = \ln(5) \quad \Leftrightarrow \quad 6x = \ln(5) + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\ln(5) + 1}{6}$$

g) $e^{3x} - 2 > 1$

$$e^{3x} > 3 \quad \Leftrightarrow \quad 3x > \ln(3) \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{\ln(3)}{3}$$

h) $\frac{e^{5x+2}}{e^{-3x+6}} > 0$

$$e^{(5x+2)-(-3x+6)} = e^{8x-4} > 0$$

L'exponentielle est toujours positive, donc cette inégalité est toujours vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Solution : $x \in \mathbb{R}$

i) $\frac{e^{5x+2}}{e^{-3x+6}} > 6$

$$e^{8x-4} > 6 \quad \Leftrightarrow \quad 8x - 4 > \ln(6) \quad \Leftrightarrow \quad 8x > \ln(6) + 4 \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{\ln(6) + 4}{8}$$

**Exercice 15 :**

Déterminer les limites suivantes, et interpréter graphiquement le résultat, en termes d'asymptote, lorsque cela est possible :

a) $\lim_{x\to+\infty}(e^{2x}+e^x+3x)$
b) $\lim_{x\to-\infty}(e^{2x}+e^x+5x^3)$
c) $\lim_{x\to+\infty}(10-e^{-0.1x})$
d) $\lim_{x\to-\infty}(e^{-x^2}+e^x)$
e) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+3}$
f) $\lim_{x\to+\infty}(e^x-x)$
g) $\lim_{x\to+\infty}\frac{15}{1-e^{1-x}}$
h) $\lim_{x\to-\infty}\frac{xe^x+3}{e^{-3x}}$

**Solution:**

a) $\lim_{x\to+\infty}(e^{2x}+e^x+3x)$

Lorsque $x\to+\infty, e^{2x}$ croît beaucoup plus rapidement que $e^x$ et $3x$.

$$\lim_{x\to+\infty}(e^{2x}+e^x+3x)=\lim_{x\to+\infty}e^{2x}=+\infty$$

**Interprétation :** La fonction tend vers $+\infty$, donc il n'y a pas d'asymptote.

b) $\lim_{x\to-\infty}(e^{2x}+e^x+5x^3)$

Lorsque $x\to-\infty, e^{2x}$ et $e^x$ tendent vers 0 beaucoup plus rapidement que $5x^3$ tend vers $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}(e^{2x}+e^x+5x^3)=\lim_{x\to-\infty}5x^3=-\infty$$

**Interprétation :** La fonction tend vers $-\infty$, pas d'asymptote.

c) $\lim_{x\to+\infty}(10-e^{-0.1x})$

Lorsque $x\to+\infty, e^{-0.1x}\to 0$.

$$\lim_{x\to+\infty}(10-e^{-0.1x})=10$$

**Interprétation :** Asymptote horizontale de la forme $y=10$.

d) $\lim_{x\to-\infty}(e^{-x^2}+e^x)$

Lorsque $x\to-\infty, e^{-x^2}\to 0$ et $e^x\to 0$.

$$\lim_{x\to-\infty}(e^{-x^2}+e^x)=0$$

**Interprétation :** Asymptote horizontale de la forme $y=0$.

e) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x+3}$

$$\frac{e^x}{e^x+3} = \frac{1}{1+\frac{3}{e^x}} \quad \text{et lorsque } x \to +\infty, \frac{3}{e^x} \to 0.$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x+3} = 1$$

**Interprétation :** Asymptote horizontale de la forme $y = 1$.

f) $\lim_{x\to+\infty}(e^x - x)$

$e^x$ croît beaucoup plus rapidement que $x$ lorsque $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}(e^x - x) = +\infty$$

**Interprétation :** La fonction tend vers $+\infty$, pas d'asymptote.

g) $\lim_{x\to+\infty} \frac{15}{1-e^{1-x}}$

$$e^{1-x} = e^1 e^{-x} \quad \text{et lorsque } x \to +\infty, e^{-x} \to 0.$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{15}{1-e^{1-x}} = \frac{15}{1-0} = 15$$

**Interprétation :** Asymptote horizontale de la forme $y = 15$.

h) $\lim_{x\to-\infty} \frac{xe^x+3}{e^{-3x}}$

$$\text{Lorsque } x \to -\infty, xe^x \to 0 \text{ et } e^{-3x} \to +\infty.$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{xe^x+3}{e^{-3x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{e^{-3x}} = 0$$

**Interprétation :** Asymptote horizontale de la forme $y = 0$.

**Exercice 16 :**

Résoudre les équations suivantes :

a) $3x - 4 = 2x + 9$
b) $5x - 4 = 8 - 3x$
c) $3 - (5 - x) = 3 - 4x$
d) $2(5 - 3x) = 6(2x + 1)$
e) $\frac{x}{15} - \frac{2}{3} = 0$

f) $\frac{5}{4}x = \frac{3}{5} + x$

**Solution:**

a) $3x - 4 = 2x + 9$

$$3x - 2x = 9 + 4 \quad \Rightarrow \quad x = 13$$

b) $5x - 4 = 8 - 3x$

$$5x + 3x = 8 + 4 \quad \Rightarrow \quad 8x = 12 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

c) $3 - (5 - x) = 3 - 4x$

$$3 - 5 + x = 3 - 4x \quad \Rightarrow \quad -2 + x = 3 - 4x$$

$$x + 4x = 3 + 2 \quad \Rightarrow \quad 5x = 5 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

d) $2(5 - 3x) = 6(2x + 1)$

$$10 - 6x = 12x + 6 \quad \Rightarrow \quad -6x - 12x = 6 - 10$$

$$-18x = -4 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-4}{-18} = \frac{2}{9}$$

e) $\frac{x}{15} - \frac{2}{3} = 0$

$$\frac{x}{15} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2 \times 15}{3} = 10$$

f) $\frac{5}{4}x = \frac{3}{5} + x$

$$\frac{5}{4}x - x = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{4}x - \frac{4}{4}x = \frac{3}{5}$$

$$\frac{1}{4}x = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{5} \times 4 = \frac{12}{5}$$

**Exercice 17 :**

Trouver les équations qui admettent $(-2)$ pour solution :

a) $2x + 4 = 0$

b) $6x + 2 = -10$

c) $-5x - 4 = -6$

**Solution:**

a) $2x + 4 = 0$

$$2(-2) + 4 = -4 + 4 = 0$$

**Conclusion :** $x = -2$ est une solution.

b) $6x + 2 = -10$

$$6(-2) + 2 = -12 + 2 = -10$$

**Conclusion :** $x = -2$ est une solution.

c) $-5x - 4 = -6$

$$-5(-2) - 4 = 10 - 4 = 6$$

**Conclusion :** $x = -2$ n'est pas une solution.

**Exercice 18 :**

Résoudre les équations suivantes :

a) $(2x + 7)(-5x + 2) = 0$

b) $64x^2 - 81 = 0$

c) $49x^2 - 42x + 9 = 0$

**Solution:**

a) $(2x + 7)(-5x + 2) = 0$

Le produit de deux termes est nul, donc :

$$2x + 7 = 0 \quad \text{ou} \quad -5x + 2 = 0$$

$$\text{Résolution de la première équation : } \quad 2x = -7 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-7}{2}$$

$$\text{Résolution de la deuxième équation : } \quad -5x = -2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{2}{5}$$

**Solutions :** $x = \frac{-7}{2}$ ou $x = \frac{2}{5}$

b) $64x^2 - 81 = 0$

$$64x^2 = 81 \quad \Leftrightarrow \quad 64x^2 - 81 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (8x - 9)(8x + 9) = 0$$

**Solutions :** $x = \frac{9}{8}$ ou $x = \frac{-9}{8}$

c) $49x^2 - 42x + 9 = 0$

Utilisation de la formule du discriminant : $\Delta = (-42)^2 - 4(49)(9) = 1764 - 1764 = 0$

Puisque $\Delta = 0$, il y a une solution unique :

$$x = \frac{-(-42)}{2 \times 49} = \frac{42}{98} = \frac{3}{7}$$

**Solution unique :** $x = \frac{3}{7}$

**Exercice 19 :**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $x(x+1) + (x^2 - 1) = 0$
2) $2x - 1 - 5 = 0$
3) $2(x-3)(2x-5) = x - 9$
4) $5x - 7 = 3$
5) $2x + 3 = 1 - 2$

**Solution:**

1) $x(x+1) + (x^2 - 1) = 0$

$$x(x+1) + x^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + x + x^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 + x - 1 = 0$$

Utilisation de la formule du discriminant : $\Delta = 1^2 - 4(2)(-1) = 1 + 8 = 9$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{9}}{2 \times 2} = \frac{-1+3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{-1-3}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

**Solutions :** $x = \frac{1}{2}$ ou $x = -1$

2) $2x - 1 - 5 = 0$

$$2x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x = 6 \quad \Rightarrow \quad x = 3$$

**Solution :** $x = 3$

3) $2(x-3)(2x-5) = x-9$

$$2(2x^2 - 5x - 6x + 15) = x - 9 \quad \Rightarrow \quad 2(2x^2 - 11x + 15) = x - 9$$
$$4x^2 - 22x + 30 = x - 9 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 - 23x + 39 = 0$$

Utilisation de la formule du discriminant : $\quad \Delta = (-23)^2 - 4(4)(39) = 529 - 624 = -95$

$$\text{Puisque } \Delta < 0, \text{ il n'y a pas de solution réelle.}$$

**Solution :** Aucune solution dans $\mathbb{R}$.

4) $5x - 7 = 3$

$$5x = 3 + 7 \quad \Rightarrow \quad 5x = 10 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

**Solution :** $x = 2$

5) $2x + 3 = 1 - 2$

$$2x + 3 = -1 \quad \Rightarrow \quad 2x = -1 - 3 \quad \Rightarrow \quad 2x = -4 \quad \Rightarrow \quad x = -2$$

**Solution :** $x = -2$

**Exercice 20 :**

Soient les deux expressions $A(x) = (x-1)^2 - 4$ et $B(x) = 9x^2 - 6x + 1$

a) Factoriser $A(x)$ et $B(x)$
b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : $A(x) = 0$ et $B(x) = 0$
c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $B(x) = A(x) + 4$

**Solution:**
Soient les deux expressions $A(x) = (x-1)^2 - 4$ et $B(x) = 9x^2 - 6x + 1$.

a) **Factoriser** $A(x)$ **et** $B(x)$

**Pour** $A(x)$ **:**

$$A(x) = (x-1)^2 - 4 = ((x-1) - 2)\,((x-1) + 2) = (x-3)(x+1)$$

Donc, la forme factorisée de $A(x)$ est :

$$A(x) = (x-3)(x+1)$$

**Pour $B(x)$ :**

$$B(x) = 9x^2 - 6x + 1$$

Reconnaissons qu'il s'agit du carré parfait :

$$B(x) = (3x-1)^2$$

Donc, la forme factorisée de $B(x)$ est :

$$B(x) = (3x-1)^2$$

b) **Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $A(x) = 0$ et $B(x) = 0$**

**Résolution de $A(x) = 0$ :**

$$(x-3)(x+1) = 0$$

$$\text{Les solutions sont } x = 3 \quad \text{ou} \quad x = -1$$

**Solutions de $A(x) = 0$ :** $x = 3$ ou $x = -1$.
**Résolution de $B(x) = 0$ :**

$$(3x-1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{3}$$

**Solution de $B(x) = 0$ :** $x = \frac{1}{3}$.
c) **Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $B(x) = A(x) + 4$**

Nous avons $B(x) = A(x) + 4$. En remplaçant $A(x)$ et $B(x)$, nous obtenons :

$$(3x-1)^2 = (x-3)(x+1) + 4$$

Développons le côté droit :

$$(3x-1)^2 = x^2 - 3x + x - 3 + 4 = x^2 - 2x + 1$$

Nous obtenons donc l'équation suivante :

$$(3x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

Développons le côté gauche :

$$9x^2 - 6x + 1 = x^2 - 2x + 1$$

Soustrayons $x^2 - 2x + 1$ des deux côtés :

$$9x^2 - 6x + 1 - x^2 + 2x - 1 = 0$$

Simplifions :

$$8x^2 - 4x = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x(2x - 1) = 0$$

Les solutions sont :

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{2}$$

**Solutions de $B(x) = A(x) + 4$ :** $x = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$.

**Exercice 21 :**

1. On considère la fonction $f$ définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{x} - \ln x.$$

   (a) Etudier les variations de $f$ et en déduire que $f$ admet un minimum sur $]0\ ;\ +\infty[$.

   (b) En déduire le signe de $f$ puis que, pour tout $x > 1$, $0 < \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{\sqrt{x}}{x}$.

   (c) En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

2. Soit $n$ un entier naturel non nul.
   On considère la fonction $f_n$ définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{n}}}.$$

   En utilisant la question 1., déterminer, si elle existe, la limite en $+\infty$ de la fonction $f_n$.

**Solution:**

1.
$$f(x) = \sqrt{x} - \ln x.$$

(a) La fonction est une différence de fonctions dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$, elle est donc dérivable et
$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{\sqrt{x}-2}{2x}$ qui est du signe du numérateur puisque $x > 0$.
$f'(x) = 0 \iff \sqrt{x} = 2 \iff x = 4\,;$
$f'(x) < 0 \iff 0 < x < 4\,;$ $f$ est décroissante sur cet intervalle
$f'(x) > 0 \iff x > 4\,;$ $f$ est croissante sur cet intervalle.
Il en résulte que $f$ a un minimum pour $x = 4$ et $f(4) = \sqrt{4} - \ln 4 2 - 2\ln 2 \approx 0,62$.

(b) Le minimum de $f$ étant supérieur à zéro, $f(x) > 0$ quel que soit $x \in ]0\ ;\ +\infty[$.
Donc $f(x) > 0 \iff \sqrt{x} - \ln x \iff \sqrt{x} > \ln x \iff \dfrac{\sqrt{x}}{x} > \dfrac{\ln x}{x} \iff \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{\sqrt{x}}{x}$, car $x > 0$.

(c) Comme $\dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$, on obtient par application du théorème des « gendarmes » que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

2. Soit $n$ un entier naturel non nul.

$$f_n(x) = \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{n}}}.$$

On peut écrire $f_n(x) = \dfrac{\ln x}{x^{\frac{1}{n}}} = \dfrac{\ln x^{n\times\frac{1}{n}}}{x^{\frac{1}{n}}} = \dfrac{\ln\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n}{x^{\frac{1}{n}}} = n\dfrac{\ln\left(x^{\frac{1}{n}}\right)}{x^{\frac{1}{n}}}$.
En posant $X = x^{\frac{1}{n}}$, $f_n(x) = n\dfrac{\ln X}{X}$.
Or $\lim\limits_{x\to+\infty} X = +\infty$ et par composition, $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln X}{X} = 0$
(d'après la question précédente) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$.