Géométrie

Guillaume Chivot

1 Rappel des notions de géométrie plane élémentaires

Avant d'expliquer les notions avancées de géométrie dans le plan, nous allons revenir sur les notions vus dans les classes précédentes et qui sont fondamentales pour comprendre les applications de mathématiques et de physique plus avancées.

Comme son nom l'indique, la géométrie plane traite des notions de géométrie dans le plan, c'est à dire en deux dimensions. Pour pouvoir se repérer dans ce plan, il faut définir des coordonnées. Pour cela, nous avons besoin d'une base. En géométrie, on nomme cette base un repère.

Définition 1

Un repère dans un plan est un ensemble de trois points O, I et J non alignés. On note se repère (O, I, J).

- Le point O est appelé origine du repère .
- La droite (OI) est appelé axe des abscisses . La longueur du segment $[OI]$ nous donne l'unité de l'axe des abscisses.
- La droite (OJ) est appelé axe des ordonnées . La longueur du segment $[OJ]$ nous donne l'unité de l'axe des ordonnées.

Un repère permet, comme son nom l'indique, de se repérer dans un plan : on ne peut définir la position d'un point qu'en fonction de celui-ci. Ils existent plusieurs types de repères interessants.

Définition 2

- Un repère est dit orthogonal si les droites (OI) et (OJ) sont perpendiculaires en O.
- Un repère est dit normé si les segments $[OI]$ et $[OJ]$ sont de même longueur.
- Un repère est dit orthonormé si il est à la fois orthogonal et normé.

Une illustration graphique est représentée sur la figure (1).

- Dans le premier repère, les droites (OI) et (OJ) sont perpendiculaires, mais les segments $[OI]$ et $[OJ]$ sont de longueurs différentes. C'est donc un repère orthogonal.
- Dans le deuxième repère, les droites (OI) et (OJ) ne sont pas perpendiculaire, mais les segments $[OI]$ et $[OJ]$ sont de même longueur. C'est donc un repère normé.
- Dans le dernier repère, les droites (OI) et (OJ) sont perpendiculaire et les segments $[OI]$ et $[OJ]$ sont de même longueur. C'est donc un repère orthonormé.

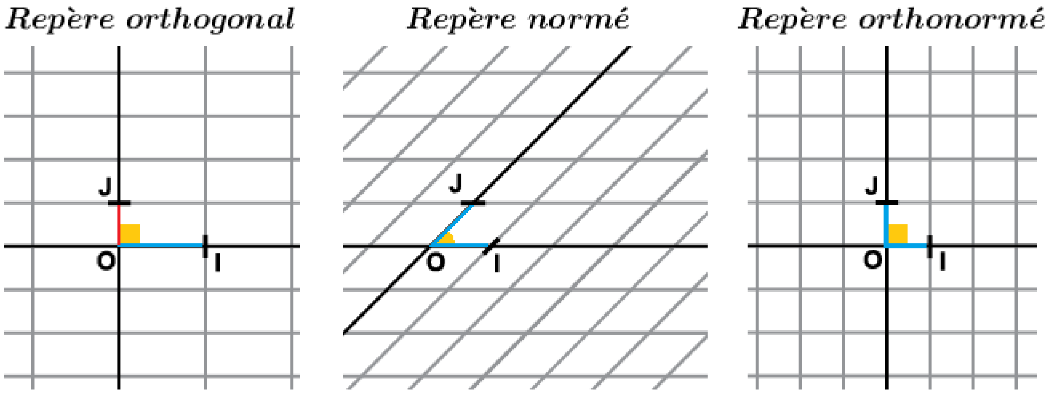

FIGURE 1 – Réprésentation de trois types de repère : orthogonal, normé et orthonormé

Définition 3

Un vecteur que l'on note $\overrightarrow{u}$ est un objet mathématique que l'on définit par

- sa direction.
- son sens.
- sa longueur.

Si on lui rajoute un point d'application A, il définit une translation dans le plan de ce point A dans un autre point B.

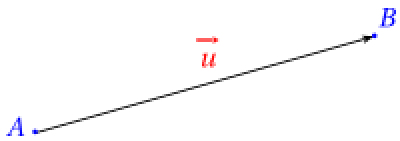

FIGURE 2 – Représentation d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ appliqué au point A. On voit qu'il permet de passer du point A au point B

La notion de vecteur permet de définir la notion de vecteur de base dans un repère. Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{OI}$ définit le vecteur des abscisses et le vecteur $\overrightarrow{OJ}$ définit le vecteur des ordonnées. Tout point du plan M peut donc s'écrire comme $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}$. Dans la suite, nous nommerons $\overrightarrow{OI}$ comme $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{OJ}$ comme $\overrightarrow{j}$.

2 Modes de repérage d'un point

Pour repérer facilement un point dans l'espace, on utilise un repère orthonormal.

2.1 Coordonnées cartésiennes

Un repère cartésien est un repère orthonormal dont les vecteurs de base sont fixes. Nous verrons plus loin que ce n'est pas toujours le cas.

Définition 4

Les coordonnées d'un point M de E dans le repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ sont deux réels x et y tels que $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$. On note alors $M|^x_y$.

Exercice 1

Etant données deux points $M_1|^{x_1}_{y_1}$ et $M_2|^{x_2}_{y_2}$, donner les composantes du vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Illustrons cela avec un exemple physique :

Soit un point matériel noté A qui se déplace dans un plan au cours du temps. On fixe un repère cartésien $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Les coordonnées de A dans ce repère sont donc $A|^{x_a}_{y_a}$ et on écrit $\overrightarrow{OA} = x_a(t)\,\overrightarrow{i} + y_a(t)\,\overrightarrow{j}$. Nous savons des classes précédentes que la vitesse est la dérivée de la position par rapport au temps et que l'accélération est la dérivé de la vitesse par rapport au temps. On en déduit la vitesse du point A

$$\overrightarrow{v_a(t)} = \frac{dx_a(t)}{dt}\overrightarrow{i} + x_a(t)\frac{d\,\overrightarrow{i}}{dt} + \frac{dy_a(t)}{dt}\overrightarrow{j} + y_a(t)\frac{d\,\overrightarrow{j}}{dt}$$

Par définition du repère, les vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ sont fixes, leurs dérivées sont donc nulles. Cela nous donne :

$$\overrightarrow{v_a(t)} = \frac{dx_a(t)}{dt}\overrightarrow{i} + \frac{dy_a(t)}{dt}\overrightarrow{j}$$

Exercice 2

Donner l'expression de l'accélération du point A en fonction de coordonnées de $\overrightarrow{OA}$

2.2 Coordonnées polaires

Un repère polaire est un repère orthonormal dont les vecteurs de base ne sont pas fixes et dépendent d'un angle θ. Il est porté par deux vecteurs base, $\overrightarrow{u(\theta)}$ et $\overrightarrow{v(\theta)}$ tel que :

$$\overrightarrow{u(\theta)} = \cos\theta\,\overrightarrow{i} + \sin\theta\,\overrightarrow{j}$$
$$\overrightarrow{v(\theta)} = -\sin\theta\,\overrightarrow{i} + \cos\theta\,\overrightarrow{j}$$

Définition 5

Le repère $\left(O, \overrightarrow{u(\theta)}, \overrightarrow{v(\theta)}\right)$ est appelé repère polaire . Le point O est appelé pôle et la droite orientée $(O, \overrightarrow{i})$ l' axe polaire

L'interêt de ce type de repaire est qu'on peut faire “pointer” le vecteur de base $\overrightarrow{u(\theta)}$ vers le point M que l'on étudie. Ainsi, tout vecteur $\overrightarrow{OM}$ peut s'écrire comme $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u(\theta)}$

Définition 6

Etant donné un point M, il existe un couple $(r, \theta) \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u(\theta)} = r(\cos\theta \overrightarrow{i} + \sin\theta \overrightarrow{j})$$

Un tel couple est appelé un système de coordonnées polaire de M par rapport au repere $\mathcal{R}$.

On reprend l'exemple d'un point matériel A qui se déplace dans un plan au cours du temps. On utilise le repère polaire $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{u(\theta)}, \overrightarrow{v(\theta)})$. Les coordonnées de A dans ce repère sont donc $A|_0^{r_a}$ et on écrit $\overrightarrow{OA} = r_a\overrightarrow{u(\theta)} = r_a \cos\theta \overrightarrow{i} + r_a \sin\theta \overrightarrow{j}$. On en déduit la vitesse du point A en coordonnées polaire

$$\overrightarrow{v_a(t)} = \frac{dr_a}{dt}\cos\theta \overrightarrow{i} + r_a\frac{d\cos\theta}{dt}\overrightarrow{i} + \frac{dr_a}{dt}\sin\theta \overrightarrow{j} + r_a\frac{d\sin\theta}{dt}\overrightarrow{j}$$

Par définition du repère, les vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ sont fixes, leurs dérivées sont donc nulles. Il est important de noter, ici, que θ est une fonction du temps t. L'expression $\cos\theta$ ne peut se dériver directement et doit être traité comme une fonction composée $(f \circ g)(t)$. Ici, f est la fonction cos et g la fonction θ. On rappelle la dérivée d'une fonction composée : $(f \circ g(t))' = g'(t)(f' \circ g)(t)$. Cela nous donne $\frac{d\cos\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\sin\theta$. De même, $\frac{d\sin\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\cos\theta$. En introduisant ces expressions dans le calcul précédent :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v_a(t)} &= \frac{dr_a}{dt}\cos\theta \overrightarrow{i} + r_a\frac{d\theta}{dt}\sin\theta \overrightarrow{i} + \frac{dr_a}{dt}\sin\theta \overrightarrow{j} r_a\frac{d\theta}{dt}\cos\theta \overrightarrow{j} \\
&= \frac{dr_a}{dt}\left(\cos\theta \overrightarrow{i} + \sin\theta \overrightarrow{j}\right) + r_a\frac{d\theta}{dt}\left(\sin\theta \overrightarrow{i} + \cos\theta \overrightarrow{j}\right)
\end{aligned}$$

Ici, on reconnait les expressions de $\overrightarrow{u(\theta)}$ et $\overrightarrow{v(\theta)}$.

Exercice 3

Donner l'expression de l'accélération du point M en fonction de coordonnées de $\overrightarrow{OM}$

2.3 Affixes

Définition 7

— On appelle image du nombre complexe $z = x + iy$, le point de coordonnées (x, y) dans le repère orthonormé, $\mathcal{R}$.

— On appelle affixe d'un point $M|_y^x$ le complexe $x + iy$.

— On appelle affixe d'un vecteur $\alpha\overrightarrow{i} + \beta\overrightarrow{j}$ le complexe $\alpha + i\beta$.

Par extrapolation, si l'on a deux points, A et B du plan d'affixes respectives a et b, l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le complexe $b - a$.

Proposition 1

- La norme d'un vecteur d'affixe z est $|z|$.
- La distance de deux points d'affixes z_1 et z_2 est $|z_2 - z_1|$.

Démonstration :

- On posant $z = a + ib$, on a la relation $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ce qui est la définition de la norme d'un vecteur de coordonnées (a, b).
- La deuxième proposition est une conséquence de la première.

Exercice 4

Donner l'image de l'ensemble des nombres complexes de module 1.

2.4 Produit scalaire

Définition 8

Dans un repère orthonormé, on considère les vecteurs $\overrightarrow{u}(x, y)$ et $\overrightarrow{v}(x', y')$.

On appelle produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le réel noté $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ tel que :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy'$$

Exercice 5

Donner le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}(-3, 2)$ et $\overrightarrow{v}(-1, -5)$

Définition 9

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. Le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le nombre réel $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ défini par :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \|\overrightarrow{v}\| \cos\theta$$

où θ désigne la mesure de l'angle formé par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Si l'un des vecteurs est nul, l'angle θ n'est pas défini. On pose alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$

Proposition 2

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan, on a :

$$|\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}| \leq \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|$$

Démonstration :
Soient $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ les affixes des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Alors :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = x_1x_2 + y_1y_2 = Re(\overline{z_1}z_2)$$

donc $|\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}| \leq |\overline{z_1}.z_2| = |z_1|.|z_2| = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|$

2.5 Déterminant de deux vecteurs

Définition 10

On appelle déterminant des vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le réel

$$\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\| \sin\theta$$

où θ est une mesure de l'angle orienté des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. On le note Det($\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$).

Proposition 3

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, Det($\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$)=0.

Corollaire 1

Trois points A, B et C sont alignés, si et seulement si, Det($\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$)

Proposition 4

Si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont respectivement z_1 et z_2 pour affixes, on a :

$$\mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \mathrm{Im}(\overline{z_1}z_2)$$

Démonstration :
Notons $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ et $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ avec $r_1 > 0$ et $r_2 > 0$. Une mesure de l'angle entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est $\theta_2 - \theta_1$ et donc :

$$\begin{aligned}\operatorname{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) &= r_1 r_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \\ &= Im(r_1 e^{-i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2}) \\ &= Im(\overline{z_1} z_2)\end{aligned}$$

Corollaire 2

Si $\overrightarrow{u} = x_1 \overrightarrow{i} + y_1 \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = x_2 \overrightarrow{i} + y_2 \overrightarrow{j}$, alors :

$$\operatorname{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

On note alors $\operatorname{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$

Exercice 6

Donner le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{u}(-3, 2)$ et $\overrightarrow{v}(-1, -5)$

Proposition 5

Pour tout vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$

$$(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})^2 + \operatorname{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 \|\overrightarrow{v}\|^2$$

Remarque : L'aire d'un parallélogramme $(ABCD)$ est $\operatorname{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ puisqu'il admet pour base $\|\overrightarrow{AB}\|$ et pour hauteur $h = \|\overrightarrow{AD}\| \sin\theta$ où θ mesure l'angle entre $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

2.6 Droites

Une droite dans un plan est une ligne droite passant par deux points, un point d'origine que nous nommerons $M_0|_{y_0}^{x_0}$ et un autre point $M|_y^x$. Pour la définir, nous préférons utiliser la notion de vecteur en posant l'égalité vectorielle $\overrightarrow{M_0 M} = \lambda \overrightarrow{u}$, où $\overrightarrow{u}|_\beta^\alpha$ est un vecteur directeur de la droite. Pour tout point (x, y) de cette droite, on a donc :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & x_0 + \lambda\alpha \\ y & = & y_0 + \lambda\beta \end{array}\right.$$

Les deux équations précédentes représentent une représentation paramétrique de la droite. Cependant, dans la majorité des cas, nous utiliserons une représentation cartésienne de la droite :

Proposition 6

— Toute droite D du plan a au moins une équation cartésienne du type :

$$ax + by + c = 0,$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $(a, b) \neq (0, 0)$.

— Deux telles équations représentent deux droites confondues si, et seulement si, elles sont proportionnelles.

Exemple :

— si b est non nul, on peut réécrire l'équation $y = mx + p$. Ce type d'équation ne permet pas de représenter les droites parallèles à (Oy).

— Soit la droite passant par deux points $M_1|_{y_1}^{x_1}$ et $M_2|_{y_2}^{x_2}$. Un point M appartient à cette droite si et seulement si $\overrightarrow{MM_1}$ et $\overrightarrow{M_1M_2}$ sont colinéaires, c'est à dire :

$$\begin{vmatrix} x_1 - x & x_2 - x_1 \\ y_1 - y & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = (x_1 - x)(y_2 - y_1) - (y_1 - y)(x_2 - x_1) = 0$$

2.7 Équation cartésienne normale d'une droite

Une droite (D) du plan peut se définir en donnant un point $A(x_0, y_0) \in (D)$ et un vecteur $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \overrightarrow{0}$ normal (c'est-à-dire orthogonal) à (D), avec $\overrightarrow{n} \neq \overrightarrow{0}$. Alors le vecteur $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est orthogonal à $\overrightarrow{n}$. C'est donc un vecteur directeur de (D).

Pour trouver l'équation cartésienne de (D), on cherche à quelle condition nécessaire et suffisante $M(x, y) \in (D)$, en écrivant

$$\begin{aligned} M(x, y) \in (D) &\iff \overrightarrow{AM} \text{ orthogonal à } \overrightarrow{n} \\ &\iff \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff ax + by - ax_0 - by_0 = 0. \end{aligned}$$

Si nous posons $c = -ax_0 - by_0$, nous voyons que

$$M(x, y) \in (D) \iff ax + by + c = 0.$$

L'équation $ax+by+c = 0$ est appelée équation normale de la droite (D). Elle fait apparaître directement un vecteur normal $\overrightarrow{n}$ à la droite, dont les composantes sont les coefficients de x et y dans l'équation, c'est-à-dire $\overrightarrow{n} = a\,\overrightarrow{i} + b\,\overrightarrow{j}$. Nous pouvons résumer ce calcul en énonçant le

Proposition 7

L'équation cartésienne
$$ax + by + c = 0$$
est l' équation normale d'une droite (D) du plan , et

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j} \text{ est un } \text{vecteur normal} \text{ à } (D),$$

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = -b\,\vec{i} + a\,\vec{j} \text{ est un } \text{vecteur directeur} \text{ de } (D).$$

Méthode :

Trouver l'équation normale de la droite (AB), avec $A(1,2)$ et $B(3,5)$.
Alors un vecteur directeur de (D) est $\vec{d} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, tandis qu'un vecteur normal à (D) est $\vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. À partir de là, on peut procéder de deux manières différentes.
Première méthode : On écrit

$$M \in (D) \iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{d} = \overrightarrow{AB} \text{ sont colinéaires} \iff \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$$

$$\iff \begin{vmatrix} x-1 & 2 \\ y-2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \iff 3x - 2y + 1 = 0.$$

On lit sur l'équation obtenue qu'un vecteur normal à (D) est $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, ce qui correspond au vecteur $-\vec{n}$ précédent.
Deuxième méthode : On écrit

$$M \in (D) \iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{n} \text{ sont orthogonaux} \iff \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$$

$$\iff (x-1)\cdot(-3) + (y-2)\cdot 2 = 0 \iff -3x + 2y - 1 = 0.$$

On retrouve évidemment la même équation (il suffit de multiplier les deux membres de l'équation par -1).

remarque :
On s'obtient l'équation fonctionnelle d'une droite à partir de l'équation normale $ax+by+c = 0$, en exprimant y en fonction de x lorsque $b \neq 0$. On a

$$ax + by + c = 0 \iff by = -ax - c \iff y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

En posant $A = -\frac{a}{b}$ et $B = -\frac{c}{b}$, on obtient l'équation bien connue :

$$y = Ax + B. \tag{7.12}$$

Le nombre A s'appelle le coefficient directeur , ou pente , de la droite (D).

Exercice 7

Donner la pente de la droite $5x + 4y + 3 = 0$

2.8 Équation cartésienne d'un cercle

On écrit que le point $M(x, y)$ appartient à un cercle (C) de centre Ω de rayon R si et seulement si la distance de Ω à M vaut R, autrement dit

$$\begin{aligned} M(x,y) \in (C) &\iff \overrightarrow{\Omega M} = R \\ &\iff \sqrt{(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2} = R. \end{aligned}$$

En élevant au carré, on voit apparaître l'équation cartésienne réduite du cercle (C), qui met en évidence son centre et son rayon :

$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2. \tag{7.14}$$

Développons maintenant les carrés. Il vient

$$\begin{aligned} M(x,y) \in (C) &\iff x^2 - 2x_\Omega x + x_\Omega^2 + y^2 - 2y_\Omega y + y_\Omega^2 = R^2 \\ &\iff x^2 + y^2 - 2x_\Omega x - 2y_\Omega y + x_\Omega^2 + y_\Omega^2 - R^2 = 0. \end{aligned}$$

En posant $a = -2x_\Omega$, $b = -2y_\Omega$ et $c = x_\Omega^2 + y_\Omega^2 - R^2$, nous obtenons l'équation cartésienne développée du cercle (C) :

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0. \tag{7.15}$$

Proposition 8

On appelle équation cartésienne réduite du cercle (C) , l'équation :

$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2.$$

avec Ω le centre du cercle de rayon R.
On appelle équation cartésienne développée du cercle (C) , l'équation :

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0.$$

avec $a = -2x_\Omega$, $b = -2y_\Omega$ et $c = x_\Omega^2 + y_\Omega^2 - R^2$

Exercice 8

Trouver l'équation développée du cercle (C) de centre $\Omega(1, -2)$ et de rayon $R = 3$.

Correction exercice 8

On écrit d'abord l'équation réduite :

$$M(x,y)\in(C) \iff (x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2=R^2$$

$$\iff (x-1)^2+(y+2)^2=3^2.$$

En développant les carrés, on obtient l'équation développée :

$$x^2+y^2-2x+4y+4=0.$$

Exemple 7.4

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la courbe (C) d'équation cartésienne $x^2+y^2+6x-2y=0$.

On reconnaît l'équation cartésienne développée d'un cercle. Pour déterminer les coordonnées de son centre et son rayon, on cherche son équation réduite en faisant apparaître des débuts de développements de carrés grâce à la formule $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. On a en effet :

$$x^2+6x=(x+3)^2-9, \quad y^2-2y=(y-1)^2-1.$$

En reportant dans l'équation développée, il vient

$$(x+3)^2-9+(y-1)^2-1=0 \iff (x+3)^2+(y-1)^2=10 \iff \left(\sqrt{10}\right)^2.$$

Ainsi (C) est le cercle de centre $\Omega(-3,1)$ et de rayon $R=\sqrt{10}$. On notera que (C) passe par O car $x=0, y=0$ vérifie son équation développée.

2.9 Équations polaires

Le principe est le même que pour les équations cartésiennes : l'équation polaire d'une courbe (C) caractérise les points M de coordonnées polaires r et θ qui appartiennent à (C). On utilisera les formules

$$x=r\cos\theta, \quad y=r\sin\theta, \quad x^2+y^2=r^2. \tag{7.16}$$

Exemple

À quoi correspond l'équation polaire

$$r=\frac{3}{\cos\theta-2\sin\theta}\ ?$$

On fait apparaître l'équation cartésienne en remarquant que

$$r=\frac{3}{\cos\theta-2\sin\theta} \iff r\cos\theta-2r\sin\theta=3 \iff x-2y-3=0.$$

Ainsi cette équation polaire est celle d'une droite ne passant pas par O (car les coordonnées $x=0$ et $y=0$ de O ne vérifient pas l'équation).

Exemple

À quoi correspond l'équation polaire $r = 4\cos\theta - 6\sin\theta$?

On fait également apparaître l'équation polaire en multipliant les deux membres de l'équation par r. On a

$$r^2 = 4r\cos\theta - 6r\sin\theta \iff x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0.$$

On obtient l'équation développée d'un cercle passant par O (car les coordonnées $x = 0$ et $y = 0$ de O vérifient l'équation). En faisant apparaître des débuts de développements de carrés, on voit que ce cercle a pour centre $\Omega(2, -3)$ et pour rayon $R = \sqrt{13}$.

Plus généralement, des calculs analogues montrent que l'on a le

Theorème 1

Soit $c \in \mathbb{R}^*$, et soient a et b des réels non nuls simultanément. Alors l'équation polaire

$$r = \frac{c}{a\cos\theta + b\sin\theta}$$

est celle d'une droite ne passant pas par O, et $r = a\cos\theta + b\sin\theta$ est l'équation polaire d'un cercle passant par O.

3 Géométrie de l'espace

3.1 Produit vectoriel

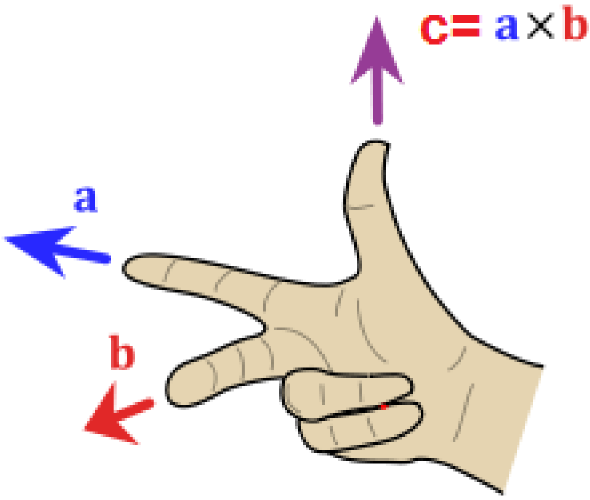

FIGURE 3 – Illustration de la règle du tire-bouchon pour $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$.

Comme son nom l'indique (et contrairement au produit scalaire qui est un réel), le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace est un vecteur , noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ (on lit : u vectoriel v).

Définition 11

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace est un vecteur $\vec{w}$ de norme

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin\theta.$$

avec $\theta \in [0, \pi]$ l'angle entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et dont la direction et le sens sont définis par la règle du tire-bouchon : lorsque le tire-bouchon tourne de $\vec{u}$ vers $\vec{v}$ par le chemin le plus court, il progresse dans le sens de $\vec{u} \wedge \vec{v}$, comme indiqué dans la figure **??**.

On remarque que si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, ou si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaire, alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

3.2 Propriétés du produit vectoriel

Proposition 9

Le produit vectoriel est anticommutatif, c'est-à-dire que, pour tout couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$, on a

$$\vec{v} \wedge \vec{u} = -(\vec{u} \wedge \vec{v}).$$

Démonstration :
En effet, lorsqu'on intervertit $\vec{u}$ et $\vec{v}$, la norme (définie par (**??**)) et la direction du produit vectoriel (orthogonale à $\vec{u}$ et $\vec{v}$) sont évidemment inchangées. Par contre, le tire-bouchon tourne de $\vec{v}$ vers $\vec{u}$, donc dans le sens contraire à celui indiqué sur la figure (**??**). Il progresse donc vers le bas, et ainsi le sens de $\vec{v} \wedge \vec{u}$ est le sens contraire de celui de $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

Proposition 10

Le produit vectoriel est distributif à gauche et à droite sur l'addition, c'est-à-dire que, pour tout triplet de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, on a

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}, \quad (\vec{v} + \vec{w}) \wedge \vec{u} = \vec{v} \wedge \vec{u} + \vec{w} \wedge \vec{u}.$$

Démonstration :
Admis

Proposition 11

Pour tout réel α et tout couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$, on a

$$(\alpha\vec{u}) \wedge \vec{v} = \alpha(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{u} \wedge (\alpha\vec{v}).$$

Démonstration :
Admis

Méthode :

Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base orthonormée directe de l'espace. Cherchons une expression du produit vectoriel des vecteurs

$$\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad \text{et} \quad \vec{v} = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 + z'\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

En utilisant les théorèmes précédent, on obtient

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge \vec{v} &= (x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3) \wedge (x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 + z'\vec{e}_3) \\ &= xx'(\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_1) + xy'(\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2) + xz'(\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3) \\ &\quad + yx'(\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1) + yy'(\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_2) + yz'(\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3) \\ &\quad + zx'(\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1) + zy'(\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_2) + zz'(\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_3). \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} &\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_1 = \vec{0} \\ &\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_2 = \vec{0} \\ &\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_3 = \vec{0} \\ &\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = -\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1 = \vec{e}_3 \\ &\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = -\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_1 \\ &\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 = -\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3 = \vec{e}_2 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge \vec{v} &= (yz' - zy')\vec{e}_1 + (zx' - xz')\vec{e}_2 + (xy' - yx')\vec{e}_3 \\ &= \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Cette formule nous donne une manière de calculer directement le produit scalaire de deux vecteurs de l'espace.

Exercice 9

Soient les vecteurs :

$$A = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} \quad \text{et} \quad B = 5\vec{i} + 5\vec{j}.$$

Calculez :

1. Le produit vectoriel $A \times B$.
2. Les valeurs des composantes C_y et C_z du vecteur $C = 2\vec{i} + C_y\vec{j} + C_z\vec{k}$ pour qu'il soit parallèle à B.

3.3 Plan de l'espace

Méthode :

Question : Donner une équation cartésienne d'un plan (P) de l'espace, sachant que ce plan possède un point $\Omega(x_0, y_0, z_0)$ et un vecteur normal à ce plan est $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$.

Le plan (P) de l'espace est défini par le point $\Omega(x_0, y_0, z_0)$ et par un vecteur *normal* (ou orthogonal) non nul $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ (Figure 9.1). Tous les points M différent Ω du plan (P) sont caractérisés par le fait que les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{\Omega M}$ sont orthogonaux, donc

$$M \in (P) \iff \vec{n} \cdot \overrightarrow{\Omega M} = 0 \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0.$$

En utilisant l'expression analytique du produit scalaire, il vient

$$\begin{aligned} M \in (P) &\iff a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \\ &\iff ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0 \end{aligned}$$

En posant $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$, on obtient la définition suivante

Définition 12

Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, l'équation cartésienne

$$ax + by + cz + d = 0$$

est celle d'un plan, et $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ est un vecteur normal à ce plan.

Méthode :

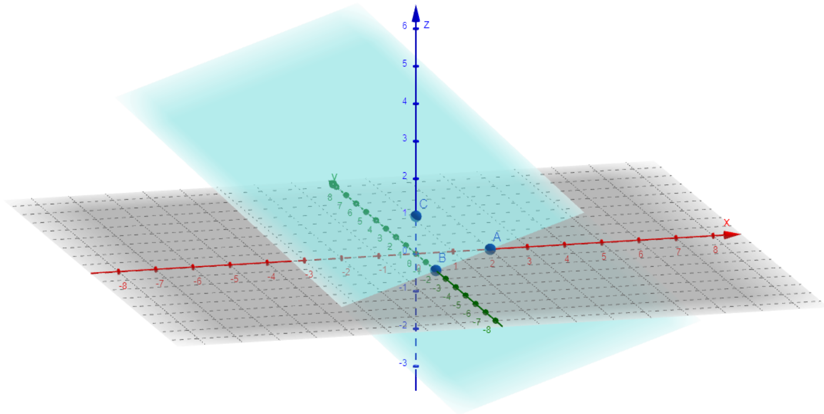

FIGURE 4 – Plan (P) d'équation $x - y + 2z - 2 = 0$

Question : Représenter le plan (P) d'équation $x - y + 2z - 2 = 0$.

Pour cela, les points les plus commodes sont les points d'intersection de (P) avec les axes.

— Soit A le point d'intersection entre le plan (P) et l'axe (Ox). Alors $y = z = 0$ puisque $A \in (Ox)$. Comme les coordonnées de A vérifient l'équation de (P), on en déduit $x - 2 = 0$, c'est-à-dire $x = 2$. Ainsi $A(2, 0, 0)$.

— De même, si B est le point d'intersection entre le plan (P) et l'axe (Oy), alors $B(0, -2, 0)$

— si C est le point d'intersection entre le plan (P) et l'axe (Oy), alors $C(0, 0, 1)$.

Une représentation graphique de (P) est donnée par la figure 4 ci-dessus.

Méthode :

Question : Dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, trouver l'équation du plan (ABC), avec $A(1, 2, 5)$, $B(1, -1, 3)$, $C(2, 3, 4)$.

Par définition du produit vectoriel, $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. C'est donc un vecteur normal au plan $(P) = (ABC)$. En utilisant l'expression analytique du produit vectoriel, on a

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

L'équation de (ABC) est donc de la forme

$$5x - 2y + 3z + d = 0.$$

Pour obtenir d, on écrit que $A \in (P)$, donc ses coordonnées vérifient l'équation. Ainsi $5 \cdot 1 - 2 \cdot (2) + 3 \cdot 5 + d = 0 \Rightarrow d = -16$. L'équation du plan (ABC) est donc

$$5x - 2y + 3z - 16 = 0.$$

Exercice 10

Soit un espace muni d'un repère orthonormé. Déterminer une équation cartésienne du plan (P) dans ce repère sachant qu'il contient le point $A(2, 5, 1)$ et qu'il a pour vecteur normal $\vec{u}(1, 2, 3)$.

Exercice 11

Soit un espace muni d'un repère orthonormé. Soit les points $A(2; -1; 1)$, $B(-1; 0; 3)$ et $C(-1; 1; 4)$.
Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

3.4 Distance d'un point à un plan

Soit (P) un plan de l'espace, d'équation $ax + by + cz + d = 0$, et soit $M(x_0, y_0, z_0)$ un point de l'espace. Par définition, la distance $d(M, (P))$ de M à (P) est la longueur MH, où H désigne la projection orthogonale de M sur (P).

Les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{HM}$ sont colinéaires, donc $\vec{n}.\overrightarrow{HM} = 0$ (s'ils sont de même sens) ou $\vec{n}.\overrightarrow{HM} = -\|\vec{n}\| \cdot \|\overrightarrow{HM}\|$ (s'ils sont de sens contraires). Par suite $\cos(\widehat{\vec{n}, \overrightarrow{HM}}) = 1$ ou $\cos(\widehat{\vec{n}, \overrightarrow{HM}}) = -1$.

Ainsi, en prenant les valeurs absolues,

$$\left|\vec{n}, \overrightarrow{HM}\right| = \|\vec{n}\| \cdot \|\overrightarrow{HM}\|.$$

On en déduit, puisque $\overrightarrow{HM} = (x_0 - x_H)\vec{i} + (y_0 - y_H)\vec{j} + (z_0 - z_H)\vec{k}$, que

$$d(M, (P)) = \frac{\left|\vec{n}, \overrightarrow{HM}\right|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|a(x_0 - x_H) + b(y_0 - y_H) + c(z_0 - z_H)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Puisque $H \in (P)$, ses coordonnées vérifient l'équation de (P). On a donc $ax_H + by_H + cz_H + d = 0$. En remplaçant dans l'expression précédente, on obtient la valeur de la distance de M à (P) :

$$\boxed{d(M, (P)) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}.$$

Exercice 12

On désigne par A, B, C, F les points de coordonnées respectives $(4; 1; 5)$, $(-3; 2; 0)$, $(1; 3; 6)$, $(-7; 0; 4)$.

1. Démontrer que les points A, B, C définissent un plan, et que ce plan a pour équation cartésienne $x + 2y - z - 1 = 0$.
2. Déterminer la distance d du point F au plan (ABC).

Remarque : En procédant de même, on démontrerait que, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, la distance du point $M(x_0, y_0)$ à la droite (D) d'équation $ax + by + c = 0$ vaut

$$\boxed{d(M, (D)) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}.$$

3.5 Droites de l'espace

Dans l'espace, une droite est l'intersection de deux plans , et sera donc représentée par un système de deux équations de la forme

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} . \tag{9.6}$$

Méthode :

Il est souvent plus commode d'utiliser une représentation paramétrique, en définissant la droite (D) par un point $\Omega(x_0, y_0, z_0)$ et un vecteur directeur $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$. Alors $M(x, y, z) \in (D)$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{\Omega M}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, c'est-à-dire si et seulement s'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{\Omega M} = t\vec{u}$. Donc

$$M \in (D) \iff \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

En identifiant les composantes, on obtient immédiatement une équation paramétrique de la droite (D) :

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}). \tag{9.7}$$

Exemple : Soit $A(1, 2, -1)$ et $B(3, 6, 1)$. Le vecteur directeur le plus immédiat de la droite (AB) est

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}.$$

Pour simplifier, on choisit $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ comme vecteur directeur. En effet $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires. Comme (AB) passe par A, on peut prendre $\Omega = A$, et on obtient une équation paramétrique de (AB) :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Exercice 13

Soient les plans P_1 et P_2 définis par les équations cartésiennes suivantes :

$$P_1 : 2x - y + z - 3 = 0$$
$$P_2 : x + y - 2z + 1 = 0$$

1. Justifier que les plans P_1 et P_2 ne sont pas parallèles.
2. Trouver un point M de l'intersection des deux plans.
3. Calculer un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d'intersection de ces deux plans.
4. Ecrire l'équation paramétrique de la droite d'intersection.

3.6 Les bases Orthonormées de l'espace : Cartésiennes, cylindriques et sphériques

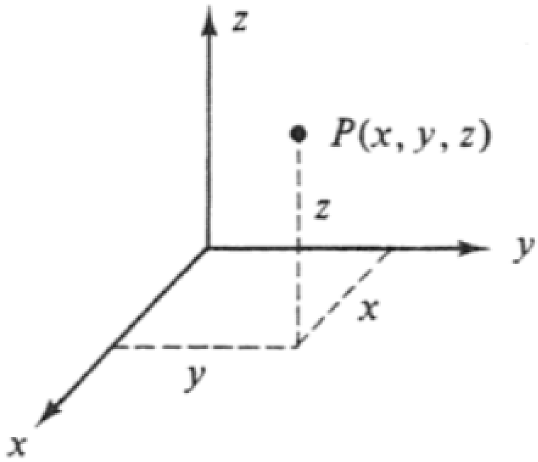

FIGURE 6 – Coordonnées cartésiennes

L'exemple le plus simple de base orthonormée est la base usuelle, dit base canoniques $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, associée aux coordonnées cartésiennes x, y, z. On utilise également deux autres bases orthonormées, liées aux coordonnées cylindriques et sphériques de l'espace.

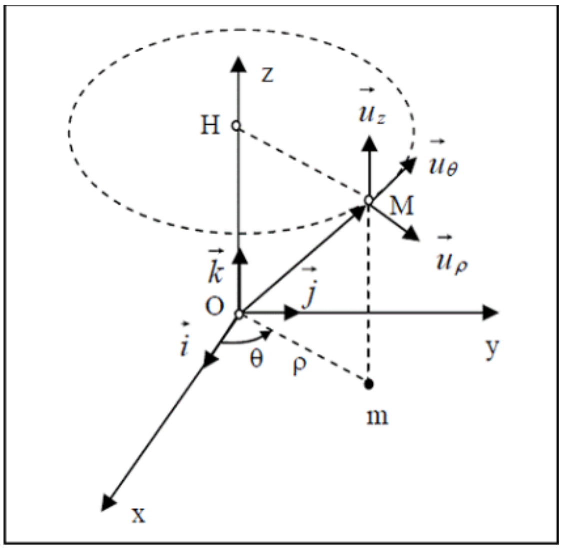

FIGURE 7 – Coordonnées cylindriques

Les coordonnées cylindriques (r, θ, z) du point M sont définies par la figure 7 . On observe que r et θ sont tout simplement les coordonnées polaires , dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$, de la projection orthogonale de M tandis que z est la troisième coordonnée des coordonnées cartésiennes (x, y, z), c'est-à-dire la cote de M. Ainsi les formules de passage des coordonnées cylindriques aux coordonnées cartésiennes sont :

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\theta \\
y &= r\sin\theta \\
z &= z. \qquad (5.20)
\end{aligned}
$$

On les appelle coordonnées cylindriques car, lorsque θ et z varient, avec $r = R$ fixé, le point M décrit la surface d'un cylindre d'axe Oz de rayon R.

Exercice 14

Donner les expressions de r et θ en fonction de x et y.

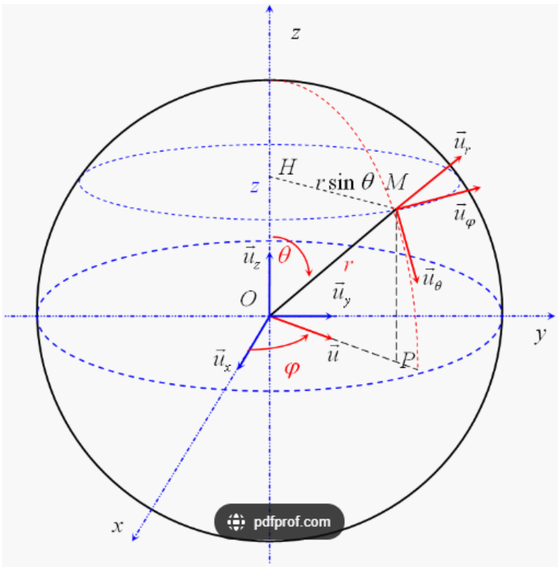

Figure 8 – Coordonnées cylindriques

Les coordonnées sphériques (r, φ, θ) du point M sont définies par la figure 8. On notera que $r = \|\overrightarrow{OM}\|$.

Pour obtenir tous les points de l'espace, on fait varier r entre 0 et $+\infty$, θ entre 0 et 2π, et φ entre 0 et π. Si r et φ varient indépendamment, avec $r = R$ fixé, le point M décrit la sphère de centre O de rayon R, d'où le nom de coordonnées sphériques.

Les formules de passage des coordonnées sphériques (r, φ, θ) aux coordonnées cartésiennes (x, y, z) sont

$$
\begin{aligned}
x &= r\sin\varphi\cos\theta \\
y &= r\sin\varphi\sin\theta \\
z &= r\cos\varphi
\end{aligned}
$$