

Devoir maison

Exercice 1 :

On \mathbb{U} note l' ensemble des nombres complexes de module 1 .

On considère l'ensemble :

$$A = \{ |z^3 - z + 2| \mid z \in \mathbb{U} \}$$

1. Montrer que A possède un majorant.

L'objectif de l'exercice est de montrer que A possède un maximum et de le calculer.

2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(2\theta)$ et $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$.
3. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = 4x^3 - x^2 - 4x + 2$$

Étudier les variations de f sur \mathbb{R} ainsi que ses limites en $-\infty$ et $+\infty$. (On dressera le tableau de variations de f).

4. Soit $z \in \mathbb{U}$. On note $\theta \in \mathbb{R}$ un argument de z . Montrer que :

$$|z^3 - z + 2|^2 = 4f(\cos(\theta))$$

5. Montrer que A admet un maximum et une borne supérieure que l'on précisera.